[illegible]

[illegible]

GEORGII HENISCHII B.

Medici & Mathematici Avg.

ARITHMETICA PERFECTA

ET DEMONSTRATA,

Doctrinam De Nvmero Triplici, Vulgari, Coſſico & Aſtronomico noua methodo per propoſitiones explicatam

Continens LIBRIS SEPTEM.



AVGVSTAE VINDELICORVM
imprimebat Dauid Franck.

M. DCIX.

ILLVSTRI AC GENEROSO D.
PHILIPPO ED-
VARDO FVGGERO
BARONI IN KIRCHBERG ET
VVEISSENHORN,

Domino ſuo plurimùm colendo,

S. P. D.

Georgius Heniſchius B. artis Medicæ D.

LIbrorum ſtudium & literarum conſeruationem, GENEROSE DOMINE, magnã laudem mereri, & aditum ad immortalem poſteritatis memoriam patefacere, exempla tum vetera, tum recentia clarum & teſtatum faciunt. Vt enim ſummos reges & principes, inter quos Ptolemæus Philadelphus rex Aegypti, & Hadrianus IMP. primas obtinent, qui numeroſas & mirificas bibliothecas compararunt, omittam, quis neſcit L. Lucullum, clariſſimum Romanum prætorem, à nulla re una magis commendari, quàm à Muſeo ſuo, in quo magnam librorum copiam ab eruditis autoribus editorum repoſitam habuit: idq́; cunctis tum ciuibus tum peregrinis patere voluit. Eandem verò laudem etiam meruit præterito ſeculo Laurentius Mediçes, qui bibliothecam, quam Coſ-

mus inchoauerat, multis, iisq; antiquis codicibus, & ex ipsa imprimis Graecia acquisitis, ampliauit: quibus viri illius aetatis clarissimi, Politianus, Mars. Ficinus, Landinus & alij, frui atque uti potuerunt. Non minorem igitur laudem meretur etiam T. G. quae bibliothecam, cuius Georgius pater fecit initium, omni genere librorum, praesertim grandiorum cumulat, & ordine pleniore artis instruit. Libri enim sunt muti praeceptores, & vita memoriae: quos è Museo tanquam penu depromere licet: cùm vel aliquid obliuione contriuimus: vel viuos praeceptores, vel certè non semper doctos & fideles habemus. Inter caeteros verò libros non postremum numerum obtinent ij, qui Arithmeticam, artem magnam & preciosam, continent. Quae enim ars antiquior? quae utilior? quae iucundior Arithmeticâ? Haec & prima est artium liberaliū: & olim pueris tum Graecis tum Romanis primùm proposita: unde & elementa illam veteres appellarunt. Haec veros fontes philosophiae continet: haec ad Theologiam, Iurisprudentiam, Medicinam: ad omnia deniq; in omni vitae genere negocia aptiores & prudentiores efficit. Nec reliqua Mathemata aliud quicquā sunt, quàm perpetua quaedam coelo, terrae, sonis, radijs, machinis, magnitudinibus, accommodata & implicata Arithmetica. Quid verò magis proprium homini, rationis

tionis

tionis compoti, quàm numerare? quàm rationes subducere? Neq; enim vel bruta animalia numerãt: vel Deus & cæteri spiritus numeris utuntur, aut indigent: cùm summam summarum rerum omnium uno simul intuitu promtam in numerato habeant. Quod verò soli humanæ naturæ, & omni & semper conuenit, annon hominem delectat? annon eundẽ maxima voluptate afficit? Cæterum huic tam nobili, tamq; necessariæ & populari arti sua iam longo tempore defuit antiqua methodus: & in libris tam multis desideratur etiamnum sua integritas, & sua perspicuitas. Id enim veterès obseruarunt, ut omnes artes, præsertim Mathematicas, per sex partes propositionis Geometricæ docerent: qua methodo nihil fuit conducibilius: nihil dilucidius. Hinc enim factum, ut & discentes faciliùs præcepta intelligerent: & veritatem & usum illorum rectè perspicerent: nec non ad cæterarum artium, præsertim Dialecticæ cognitionem, aptiores euaderent. Quod cõfirmans Galenus, autor grauis, cupidum eruditionis in quacunq; scientia, vult primùm exerceri in Arithmetica & Geometria: & tandem aggredi Dialecticam. Nec diuersum ab illo sensit Plato, vir doctissimus totius Græciæ, qui vestibulo scholæ suæ præfixit symbolum, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω: Geometriæ nomine etiã Arithmeticã more veteri comprehendẽs.

Quotusquisq; verò liber de Arithmetica scriptus reperitur, qui omnes numeros habeat, id est, perfectā & integram (perfectam enim hîc non qualitate, seu summis gradibus omnium partium: sed quantitate, seu numero omnium partium intelligimus) integrā, inquam artem contineat? Pleriq; enim autores solum numerum vulgarem explicant: eruditiores numeros, Cossicum & Astronomicū negligunt. Quis verò neget integrum esse melius mutilato? quis imperfectum perfecto præferat? Et inter triplices numeros is, qui Cossicus dicitur, maximè excellens & diuinus est. Quod enim Orpheus de Deo dixit:

εἷς ἐϛ' αὐτογενὴς, ἑνὸς ἔκγονα πάντα τέτυκται.
Vnicus est ex se, soboles sumus unius omnes:

Idem (si magna licet componere paruis) ad numerū Cossicum, quem unam radicem vocant, propemodum accommodari potest: qui & quemuis numerum tanquam sobolem sua potestate complectitur, simplicem, quadratum, cubum, biquadratum, & alios innumeros, qui continua multiplicatione generantur: & pro re ignota positus, partes continet trientem, quadrantem, bessem: partibus trienti, quadranti, bessi numeri quæsiti respondentes. Imperiti verò Logisticæ scrupulorum Astronomicorum ad calculum Astronomicum tam inepti sunt, quàm rotæ quadratæ ad motum currus, rotundas

rotas

rotas requirentis. Iam cui non displiceat mos ille demonstrandi, quo plerique Arithmetici delectantur, per nebulas, id est, per literas sine numeris, & sine luce syllogismorum, quo nihil est obscurius, nihil Heracliti libro similius. Idem enim de illis dici potest, quod Socrates olim Euripidi librum Heracliti offerenti, & roganti, cuiusmodi videretur, respondit: Quæ quidem intellexi, præclara: arbitror autem & ea, quæ non intellexi: quanquam natatore Delio opus, ut ne quis in eo præfocetur. Huic igitur remoræ studiorum & defectui, ut succurrerem, & collapsam antiquam consuetudinem instaurarem, nouam conscripsi Arithmeticam, quæ & integra esset, & methodo veteri constaret: & candidum sermonem, qui præcepta artis per exempla in numeris, vel pueris perspicua, demonstrat, contineret: certò mihi persuasum habens, hunc laborem meum viris doctis & eruditis non ingratum: discentibus verò & eruditionis cupidis non inutilem futurum. Tuo verò nomini, GENEROSE domine, inscripsi: tum ut meam erga T. G. obseruantiam publicè testarer, quę singulari iam multos annos me beneuolentia priuatim complexa est: tum quod non dubitem, à T. G. hospitio exceptum iri humaniter eum librum, quem nulla hactenus habuit bibliotheca: nec non

habeam

habeam certum, eum librum, qui primam Matheseos partem nouo ſplendore illuſtrat, patrocinio ſuo dignum iudicatum iri à T.G. quæ verá uniuerſæ Matheſeos dignitatē contra ignaros & oſores (indiuiduos comites) conſtanter defendit, & ſuo exemplo alios ad amorē diuinæ huius philoſophiæ magna & digna cum laude accendit & cōmouet. Bene valeat T.G. numeroſos años, unà cum tota illuſtri familia. Avg. Vind. Non. vnbr. 1609.

DE MATHEMATICA.

Mathematica est ſcientia quantitatis tàm continuæ quàm diſcretæ, fons reliquarum artium, diſcentes ad alias philoſophiæ partes præparans.

Appellatur & matheſis & mathema, ἀπὸ τοῦ μαθεῖν, pro quo hodie uſurpatur μανθάνειν, quod diſcere, ſcrutari, explorare, inquirere ſignificat. Græcum autem illud vetus μαθεῖν originem habet ex Hebræo lomad per aphæreſin, quod eſt didicit: aut limed, docuit: vel ex radice modad, quod eſt menſurauit. Nam diſcere eſt ad menſuram cognitionis ſuæ plura adijcere. Hinc Thalmid diſciplina, & per ſynecdochen diſcipulus. Latini & diſciplinam vocant, ratione diſcentis: & doctrinam ratione docentis: quæ ut ſunt natura ſimul, cum relatiua ſint, ita rem eandem denotare poſſunt. Mathemata igitur nomen ſuum habent à diſcendo, vel κατ' ἐξοχήν, quaſi hæc tantum digna ſunt, quæ diſcantur, vel quod his nulla doctrina ſit excellentior, idque propter demonſtrationes, quas habent, certitudine atque euidentia præſtantiores, quàm ſint in alijs diſciplinis: vel quòd viuam vocem præceptoris, & magnam induſtriam diſcẽtis requirant: vel, ut ait Plato, quod in ſcholis illa ſimpliciter olim traderentur: de alijs vero magis diſputaretur: quam ob cauſam etiam inter acroamaticas artes recenſentur, in quibus nemo ἄνευ μαθήσεως, ſolo uſu excellere, nec αὐτοδίδακτος eſſe poteſt: vel denique quaſi recordationes, quòd conferant nobis ad recordationem eorum principiorum, quæ menti noſtræ impreſſa ſunt. Pythagoreis enim, qui primi Mathemata vocarunt μανθάνειν, id eſt, diſcere, eſt recordari earum notitiarum, quæ menti impreſſæ ſunt: & hinc μάθησιν ijdem interpretantur ἀνάμνησιν, id eſt, reminiſcentiam, excitatam à rebus apparentibus, & inde à ratione ipſa in ſeſe conuerſa formatam & abſolutam.

Plato in Philebo duplicem facit; aliam, quam vulgus: aliam, quam philoſophus tractat. Illam practicam; hanc theoreticam vocat.

Ratione obiecti. Mathematicæ partes duæ ſunt: Arithmetica & Geometria Quantitas enim obiectum Mathematicæ duplex eſt: πόσον & πηλίκον, πόσον eſt quantum, quod copiâ

A multo-

multorũ definit: & circa hoc Arithmetica verſatur. πηλίκον eſt quãtum, quod molem magnorum deſcribit: & circa hoc Geometria occupatur. Et hæc vera & pura ſunt Mathemata.

Ratione finis & obiecti ſimul, Mathematicarum artium genus duplex eſt: unum purum, alterum mixtum. Purum eſt ſola Arithmetica & Geometria: ex quibus illa numerũ: hæc magnitudinem per ſe atque ſolum conſiderat, hærentem quidem in rebus phyſicis, ſed inde prorſus auulſam mentis agitatione: unde & ἐξ ἀφαιρέσεως θεωρήματα Græci vocant. Mixtum eſt, quod vel ſolam Arithmeticam, hoc eſt, numeros: vel ſolam Geometriam, hoc eſt, magnitudines: vel Arithmeticam pariter & Geometriam ad aliquam rem ſenſibilem ſeu phyſicam accommodat: unde & Ariſtoteles φυσικώτερα μαθήματα, hoc eſt, implicata rebus phyſicis appellat. Puri igitur finis eſt ſola cognitio: & ſub intelligentiam ſolam cadit: mixti finis eſt actio, & ſub intelligentiam ſimul & ſenſus cadit.

Rurſus quod ſolam Arithmeticam transfert ad uſum, Logiſtica & Muſica: quod ſolam Geometriam, Optica & Geodæſia: quod utranque ſimul, Coſmographia & Mechanica dicitur. Logiſtica Arithmeticam varijs rebus phyſicis ſupputandis applicat: Latinis ſupputatrix. Muſica, aliàs harmonice, eandẽ ad ſonos refert. Optica Geometriam transfert ad radios viſiuos. Geodæſia eandem adhibet ad varia corpora, imprimis terræ, quæ dimetitur. Coſmographiæ partes duæ ſunt, Aſtronomia & Geographia. Aſtronomia Arithmeticam & Geometriam cælo: Geographia utranque terræ adhibet. Mechanica ſimiliter utrâque inſtruendis varij generis machinis, Muſicis, Geodæticis, Aſtronomicis utitur.

Ex

Ex quo apparet, id quod vulgo dici solet, quatuor esse artes Mathematicas, rudi Minerua dici. Neque enim Astronomia & Musica vel solæ mixtæ Mathematicæ sunt: vel etiam propriè Mathematicæ vocati merentur. Nam præter Astronomiam & Musicam sunt & aliæ: ut Optica, Logistica, Geographia, Geodæsia: & Astronomia & Musica propriè artes physicæ sunt: cum de quantitate nihil præcipiant: sed tantum de rebus multis & magnis: ut sonis, qui audiuntur: & corporibus, quæ cælo continentur. Quod vero inter Mathematicas potius recenseri solent: id fit eam ob causam, quòd nullam ex obiecto suo, ut sono & cælo, demonstrationem petant: sed ex obseruatione proportionum & motuum. Puræ igitur veræ: mixtæ quasi Mathematicæ sunt.

Rursus sub Optica, catoptrica, mesoptica, & scenographia: sub Astronomia, Chronologia, & Astrologia. Sub Chronologia computus Ecclesiasticus Sub Astrologia προγνωστικὸν καθολικὸν & γενεθλιαλογικόν. Sub Geographia anemographia, λιμενευρετική, hydrographia, chorographia. Sub Geodæsia, Euthymetria. Sub Mechanica canonica, machinatia, thaumatopoetica continetur. Quidam etiam architecturam & artem militarem quasi mathematicas vocant, sed impropriè. Sic enim & cæteræ artes etiam illiberales idem nomen sibi usurpare possent: cum omnes ex Geometria, aliarumue artium mathematicarum aliqua decerptum aliquid habeant: unde Philo γεωμετρίαν, μητρόπολιν πασῶν τεχνῶν appellauit.

Optica veritatem & fallaciam visibilium simplicium iudicat. Latinis perspectiua. Catoptrica visibilia reflexa: ut mesoptica refracta explicat. Catoptrica, quasi specularis dicitur à κατόπτρου, id est, speculis, quæ reflectunt non solum lucem & colorem, sed & figuram & imaginem Scenographia res apparentes ea figura qua conspiciuntur, rursus in alia re exprimit, depictasque exhibet: sic dicta quasi σκηνῶν γραφία, scenarum adumbratio: alij σκιαγραφίαν vocant, quæ vox propriè eam artis pictoriæ partem significat, quæ umbras & tenebras fingit.

Chronologia rerum gestarum tempora per motum astrorum & epochas explicat. Computus Ecclesiasticus spacia illustriorum temporum ex cælestium luminum motibus supputat.

Astrologia duarum scientiarum, Physicæ & Astronomiæ filia est. Naturales enim stellarum & configurationum cælestium proprietates considerat, & hinc mundi inferioris mutationes elicit.

Προγνωστικὸν καθολικὸν toti mundo vel plurimis illius locis communia meteora, aliaque futura accidentia tradit: unde & meteorologicum dicitur. Γενεθλιαλογικὸν priuatorum hominũ condiciones considerat.

Anemographia est ventorum descriptio, & per instrumenta obseruatio.

Limineuretice est portuum inuestigandorum ratio, per declinationem magneticam, & longitudines & latitudines locorum: qualē ante paucos annos descripsit Hugo Grotius Batauus.

Hydrographia est descriptio marium, quæ totam terrā ambiunt.

Chorographia à Geographia ut pars à toto differt. Geographia enim, ut ait Ptolemæus, est picturæ totius terræ, quam οἰκουμένην vocant, imitatio. Chorographia partes terræ à toto abscindit, easque accuratius considerat; describens ferè singula, eaque etiam minima, ut sunt portus, villæ, vici, fluuiorum diuertigia, quæ ἐκτροπὰς Ptolemæus vocat. Eadem & topographia dicitur: quamuis alij diuersam faciunt: ut nimirum Chorographus ea omnia picturis visenda exhibeat: quæ Topographus historicè describit.

Euthymetria per radios visuales aptè directos metitur lineas rectas varijs instrumentis, ut quadrante, quadrato, astrolabo.

Canonica docet construere instrumēta, quibus ad obseruationes & opera varia mathematica utimur. Sunt enim instrumenta Arithmetica, Geometrica, Astronomica, Geodætica, Euthymetrica, & sic deinceps.

Machinaria minimâ potentiâ magna pondera machinis adhibitis præter naturam mouet. Pappus manganariam, siue μαγγαναρίων μηχανικῶν τέχνην vocat. μάγγανα enim sunt μηχανήματα, eaque ἑλκτικὰ & στατικά. Hegesippus manganum vocat.

Thaumatopoëtica instrumentorum quæ seipsa mouent, sine
ullo externo motore, effectrix est: ut automata horas
designantia, & columba volitans
Archytæ.

TYPVS

TYPVS DIVISIONIS.

Mathematica alia

- Pura, quæ conſiderat vel ſolum
  - Numerum, ut Arithmetica.
  - Magnitudinem, ut Geometria.
- Mixta, quæ ad rem aliquam ſenſibilem accommodat aut
  - Arithmeticam ſolam ut
    - Logiſtica.
    - Muſica.
  - Geometriam ſolam, ut
    - Optica, ſub qua catoptrica, meſoptica, & ſcenographia.
    - Geodæſia, ſub qua Euthymetria.
  - Vtranque
    - Coſmographia, ſub qua Aſtronomia, Aſtrologia, Computus Eccleſiaſticus, Chronologia, Geographia, Anemographia, Limineutetice, hydrographia.
    - Mechanica, ſub qua canonica, machinaria, thaumatopoëtica. Hinc mathematici machinarij.

Adiuncta *Mathematicæ* ſunt varia.

1. Theſaurus Mathematicæ tantus eſt, ut nemo unquam illum totum exhaurire potuerit. Omnes enim artifices de ſeipſis fateri coguntur, quodSolon de ſeipſo teſtatur, cũ ait. *Quantitas.*

Aſſiduè diſcens plurima, fio ſenex.

2. Matheſis eſt maxima ſapientiæ humanæ pars, & certitudine artes omnes: ut medicinam, militarem & alias: ordine vero Ethicam antecedit. Per demonſtrationes enim acquiritur: & una ex ſpeculatiuis eſt: obiecti verò ratione media eſt inter ſpeculatiuas, phyſicam ſuperans: ſuperata à metaphyſica. *Qualitas.*

3. Maxima beneficia maxima ingratitudine compenſantur, ait hiſtoricus. Idem & Mathematicæ ſæpe accidit: quam de omnibus optimè meritam multi non tantum negligũt: ſed & ut inutilem contemnunt *Paſſio.*

4. Quælibet terra artem alit: aliæ vero regiones aliam imprimis. Sic Arithmeticam præcipuè Phænices: Geome- *Vbi.*

triam Ægyptij: Aſtronomiam Chaldæi: Græci uniuerſam Mathematicam excoluiſſe traduntur: inter quos Plato, uir ſapientiſſimus Græciæ, princeps extitit.

Quando 5. Mathematica una antiquiſſimarum ſcientiarum eſt. Nam & veteres illam docebant, diſcebant, exercebant, priusquam vel Phyſica, vel Ethica vel Logica eſſet: & inuentis etiam his artibus ab hac initia ſtudiorum ducebant: eruditionis vero abſolutionem à phyſicis & politicis petebant. Nunc cum primas has veteribus artes nimis ſerò attingimus: vel ne à limine quidem etiam ſalutamus, non mirum, quòd umbram veterum in cognitione rerum vix aſſequamur.

ARITHMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ LIBER PRIMVS,

DE ARITHMETICA.

Arithmetica eſt pars Mathematicæ extructa ex principijs nobiſcum natis, occultas numeri proprietates & intricatas rationes rectè & facile explicare docens.

Adiuncta eius alia ſunt communia toti Mathematicæ, de quibus paulo ante: alia propria, inter quæ ſunt & hæc.

Relatio. 1. Arithmetica omnium Mathematicarum prima eſt, & veluti parens, dux & domina. Hac enim ſublata, euaneſcunt & cæteræ, ſed non contrà ſublatis cæteris, etiam hæc ipſa euaneſcit.

Actio. 2. Nullius artis tàm frequens quàm Arithmeticæ actio eſt Hæc agit, ſiue quis negotio, ſiue otio ſe dedat: hæc operam dat ſtudioſo tum pecuniæ, tum artium liberalium: hæc priuatam & publicam vitam agenti fidelem miniſtram ſe præbet.

Vbi. 3. Floruiſſe apud Phænices propter mercaturam referunt hiſtori-

historici: floret eadem etiamnum in tabernis mercatorũ. Turpe igitur iacere spretam atque neglectam in scholis, quibus philosophiæ defensionem atque conseruationem Resp. commendauit.

4. Hæc disciplina, ut mox incipiente mundo cœpit: ita nulli magis ætati, quàm primæ conuenit: eámque ob causam discenda inter ipsa studiorum initia, & non post principia. Quando.

Obiectum illius est numerus.

Species duæ: Calculatoria & Notularia. Calculatoria calculis: notularia notis Arithmeticis utitur: illa additionem & subtractionem: hæc multiplicationem & diuisionem minore labore & citius absoluit. Illa igitur in rariore: hæc in frequentiore usu.

Partes tres sunt. Vulgaris, Cossica & Astronomica. Et rursus cuiuslibet duæ partes: communis & propria.

Communis pars est isagogica seu uniuersalis doctrina de notis numerorum Arithmeticis: de principijs eorundem & instrumentis, quibus fit supputatio. Principia sunt definitiones, diuisiones, communes sententiæ, postulata. Instrumenta sunt quinq;: numeratio, additio, subtractio, multiplicatio, diuisio.

Propria pars instrumenta ad uberiorem usum accomodat, & regulas tradit, id est, methodos certas, per quas omnis generis quæstiones, quarum data numerum quæsitum respiciunt, solui possunt. Etsi enim quædam exempla solo instrumento absolui possint: id tamen in leuibus tantum quæstionibus accidit: & quamuis etiam instrumento difficiliores absoluãtur: id tamen plerunque fit intercedente regula aurea, quæ subintelligitur, ut fit in multiplicatione & diuisione.

Rursus

Rurſus regularum aliæ ſunt uniuerſales, aliæ particulares. Vniuerſales præcipuæ ſunt tres: Regula aurea, Regula Falſi, & regula Algebræ. Particulares infinitæ fingi poſſunt.

COMMVNIS PARS ARITHMETICÆ.

De Notis Nvmerorvm.

Notæ numerorum aliæ ſunt veteres, aliæ recentiores. *Veteres* ſunt, quibus uſus eſt Euclides, lib. 7. 8. & 9. Sunt autem puncta vel lineolæ: ex quibus unum punctum unitatem efformat: plura tot unitates, quot puncta ſunt in dato numero. *Recentiores*, eæque tractatu faciliores, quæ nunc ſunt in uſu, zyphræ, vel ciphræ vel ſifræ appellantur. Cuius vocabuli origo alijs eſt Hebræa, alijs Græca. Plerique enim deriuatum iudicant ex Hebræo verbo Saphar, quod ordine numerauit, ſignificat: unde ſophar numerus, & vox ſiphra. Alij ſiphrarum nomen à Græca voce ψῆφος deducunt. Nā ψῆφος & ψηφοφορεῖν ſignificat calculum & calculis ſupputationem inſtituere. Hæc eadem verò nomina etiam his conueniunt appellationibus notarum, quibus Arithmetici numeros exprimunt.

Sunt autem numero decē hoc ordine. 9 8. 7. 6 5. 4 3. 2. 1. 0. quarum priores nouem dicuntur ſignificatiuæ: decima & ultima *nota* eſt priuationis & nihil per ſe ſignificat. Hæc igitur figura 1 ſignificat unum. 2 duo. 3 tria & deinceps. 0 autem, quæ & cifra nomine peculiari appellatur, auget tantum ſignificationem & ſic valorem aliarum figurarum: ut apparet in ſequenti tabula, quæ numeros claſſibus nonarijs diſtinguit.

I. *Vnitatum.*	1.	2.	3.	4.	5.
	unum,	duo,	tria,	quatuor,	quinq;

ſex,

6. 7. 8. 9.
sex, septem, octo, nouem,

2. Denariorum.
10. 20. 30. 40.
Decem, viginti, triginta, quadraginta,
50. 60. 70.
quinquaginta, sexaginta, septuaginta.

3. Centuriarum.
100. 200. 300.
Centum, Ducenta, Trecenta,
400. 500. 600.
Quadringenta, Quingenta, Sexcenta,
700. 800. 900.
Septingenta, Octingenta, Nongenta.

4. Millenariorum.
1000. 2000. 3000.
Mille. Duo millia. Tria millia.
4000. 5000. 6000.
Quatuor millia. Quinq; millia. Sex millia.
7000. 8000. 9000.
Septem millia. Octo millia. Nouem millia.
Et sic in infinitum.

Compositi autem fiunt ex simplicibus numeris sæpe repetitis compositis & inter se multiplicatis, ut 11. undecim, 12. duodecim, 13. tredecim, 14. quatuordecim. Sic 21. viginti unum, 22. viginti duo, & sic deinceps.

Cifra igitur nihil significat, sed ideo præponitur figuræ significanti, ut ipsa eo loco ponatur, quo nihil numerari oportet, sed limitem tantum augeri.

Porrò notas istas Valla atque Cardanus Indicas esse existimant, Sunt qui eas Phœnicibus adscribant: plerique Saracenis acceptas referunt. Dasypodius nostro tempore primus à Græcis librarijs (quorum olim magna fuit copia) ex literis, quibus veteres Græci tanquam numerorum notis sunt usi, corruptis ortas esse confirmat, quæ deinceps omnium gentium suffragio retentæ sint, Optimum enim nume-

ros notandi compendium suppeditant: & communes linguis omnibus esse possunt. Literæ autem Græcorum, ex quibus corruptis characteres nati sunt, hæ sunt.

α. ϐ. γ. δ. ι. ϛ. ζ. η. ϑ.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Finxerunt enim ex literis suis has numerorum notas vel abjectione, ut in nota binarij numeri: vel additione, ut in ternarij: vel inuersione, ut in septenarij numeri nota. Et olim quasdam etiam aliter scripserunt, ut ℞ 4. ∽ 5, Λ 7, quæ nunc elegantius notantur. Sola cifra ex arbitrio Arithmeticorum figuram suam adepta est, quæ habet notam circuli, ut denotet supra denariū numeros, ut circulum in seipsos recurrere: & ex 9. primis elementis & ipso denario composito constare omnem numerum, quantuscunq; ille fuerit; ut 11. 12, 13. & sic deinceps. Quam ob causam non immerito & quartæ vocalis eadem nota est, quæ omnibus seruit affectibus. In Arithmetica verò instar puncti se habet Vt enim punctum in Geometria expers est magnitudinis: sic cifra expers est omnis numeri. Vtrunq; igitur coaceruatum infinities nullam constituit magnitudinem vel numerum.

PRINCIPIA NVMERORVM.

DEFINITIONES.

1. Vnitas est, secundum quam res quælibet una dicitur. Sic secundum unitatem unum lapidem, unum hominem, unū equum dicimus.

2. Numerus est multitudo ex unitatibus collecta.

3. Numerus aut est datus, aut quæsitus. Datus, Græcis δεδόμενον, est cognitus, isq; necessarius ad supputationem. Omnis enim nostra cognitio ex præexistente aliquo cognito oritur. Quæsitus, Græcis ζητούμενον, est incognitus, qui aut reperitur, aut probatur.

3. Nume-

4. Numerus quæsitus reperitur praxi, quam Geometræ κατασκευὴν vocant, eaq́; vel breuiore, vel prolixiore. Praxis breuior vocatur compendium: vulgo κατ' ἐξοχὴν practica. Probatur demõstratione vel τοῦ ὅτι, vel τοῦ διότι. illa fit ex priore, & ἀπόδειξις perfecta dicitur: hæc ex posteriore, & ἀπόδειξις imperfecta vocatur. Latini examen, Græci δοκιμασίαν vocant.

Hac probatio per duos imprimis numeros, septenarium & nouenarium vulgo institui solet: qua numerorum ordines per subtractionem diuidit: siue, quod idem est, residuorum æqualitatem explorat: prior per septenarium difficilior & tardior: ideoq́; rarior: altera facilior & velocior: ideoq́; usitatior. Septies enim, v. g. abiecto nouenario 63. subtrahitur: id quod fit septenario nouies subtracto. Nec tamen & per quemuis alium numerum simili modo eadem probatio institui non potest. Quacunq́; vero ea sit, fallax interdum est, ut cum 7. aut 9. aliusúe numerus plus minusúe æquo positus fuerit, rarius tamen in nouenario quàm septenario & alijs numeris fallax reperitur.

5. Numerus alius verus, alius falsus. Verus est, qui rei quam numerat, congruit. Falsus, qui contrà. Falsus semper per falsum concluditur: verus autem & per falsum concludi potest: ut in regula Falsi.

6. Numerus alius vulgaris, alius figuratus, alius Astronomicus. Vulgaris est qui notis vulgaribus exprimitur, & ut totus in partes quotlibet prò arbitrio diuiditur. Hunc & Arithmeticum vocant.

Figuratus est, qui ad figuras Geometricas accommodatur: unde & Geometricum appellant: isq́ue duplex, alius absolutus, alius Cossicus.

Astronomicus est, cuius tres tantum classes sunt, integrũ, sexagenæ & scrupula.

7. Rursus numerus alius effabilis, alius ineffabilis. Effabilis est vulgaris, qui & verus & rationalis. Græcis ῥητὸς ap-

pellatur, eruditis Arithmeticis. Ineffabilis eſt qui notam diuerſam ab aliis numeris habet, & proprie quantitatem continuam exprimit. Græci ἄλογον & ἄῤῥητον vocant, Latini irrationalē, Arithmetici ſurdum, & Geometricum. Quod enim ipſo notatur, certa unitatum ſum̃a exprimi non poteſt: unde & mutus potius quàm ſurdus appellari deberet. Sic tertij penultimæ primæ Euclidis numeri quantitas plerunque ineffabili numero explicatur. Eſt autem oppoſitus quadrato & cubico vero, quorum radix numeris rationalibus exprimi poteſt. Nota eſt ſic. ℞ 5. vel √. 5. Geometræ & ἀσύμμετρον vocant, hoc eſt, incommenſurabilem.

8. Numerus alius ſimplex, alius compoſitus. Simplex eſt, qui unâ ſolum figurâ notatur. Eſt igitur denario minor. Sunt autem nouem charaƈteres, quibus omnes numeri deſignantnr, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Logiſtæ vocant digitum: Græci μοναδικὸν. Compoſitus eſt duplex, articulus & mixtus.

Articulus eſt, qui primo loco ciphram habet coniunƈtam cum digito. Alij malunt appellare decadicum, ut 10, 20, 30: & alij innumerabiles.

Mixtus eſt, qui conſtat ex digito & articulo, ut 11, 12, 13, 14, 15, 16 & alij innumerabiles. Hunc alij coniunƈtum, alij compoſitum nomine generis vocant.

9. Numerus alius integer, alius fraƈtus eſt. Integer eſt numerus unius termini, ut 10, 25, 360, qui & μονόστιχος dici poteſt, quaſi una ſerie & acie deſcriptus. Fraƈtus eſt, qui contra, ut $\frac{1}{10}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{6}{360}$.

10. Numeri alij ſunt eiuſdem ſpeciei, alij diverſarum ſpecierum. Eiuſdem ſpeciei ſunt cognomines, qui & homonymi, & homogenei appellari poſſunt. Diuerſarũ ſpecierum ſunt, qui diuerſa ſignificata habent, ut ſi dicam, Annus conſtat diebus 365, horis 5, minutis 49. Horum in tota πραγμα-

τικα numerorum ſubinde fit mentio.

11. Numerus alius eſt numerans, alius numeratus. Numerans eſt, quo omnia nominamus, nulla re, quæ numeratur, adiecta. Ariſtoteles μοναδικὸν vocat, quod conſtat ex ſolis unitatibus: alij κεχωρισμένον & ἀσώματον & Mathematicũ: Latini infinitum & abſtractum.

Numeratus eſt, cuius unitates non ſunt ſimplices, ſed certi cuiuſdam generis res quædam, ut hora una, dies unus. Hunc Ariſtoteles ὅλως ἀριθμὸν vocat: alij ἀριθμούμενον, & ἀριθμητὸν, & phyſicum, id eſt, naturalem & ſenſibilem, & contractum, Stifelius vocat numerum vulgariter denominatum.

12. Numerus aut additur, aut ſubtrahitur, aut multiplicatur, aut diuiditur: aut ratiocinando inueſtigatur. Hinc alius appellatur totus, alius reliquus, alius productus, alius quotus, alius pars proportionalis. Additio eſt partium in unam ſummam collectio. Subtractio eſt alterius partis, quæ reſtat ex altera parte è toto ſubtracta inuentio. Multiplicatio eſt compendiũ additionis: ut diuiſio cõpendiũ ſubtractionis.

13. Numerus alius eſt affectus ſigno proſthaphæretico, alius non affectus.

Rurſus affectus ſigno proſthaphæretico alius verus, alius fictus. Verus eſt, qui rem in natura extantẽ ſignificat: ut 3 -- 5. Fictus qui contra, ut 0 -- 5. Hic numerus minor quàm nihil dicitur.

14. Numeratio eſt diligens plures numeros coniunctos rectè proferendi & prolatos ſuis notis aptè ſcribendi ratio.

15. Numerationis igitur duæ ſunt partes, Arithmeſis & Aparithmeſis.

Arithmeſis docet quomodo aliquis numerus, qui datus eſt, ſit efferendus.

Aparithmeſis docet, quomodo prolatus ſit ſuis notis ſcribendus.

16. Limes eſt locus numeri, ſecundum quem notæ valor primùm æſtimatur: eſtq́; triplex: primus, ſecundus, tertius. Hunc aliqui gradum vocant.

17. Figura conſiſtens in primo loco valet ſeipſam: in ſecundo valet ſeipſam decies: in tertio centies: in quarto rurſus unitates ſed millenarias, & ſic deinceps.

18. Periodus eſt certa locorum comprehenſio, ſecundum quam notarum valor ſecundò æſtimatur: eſtq́; primò perfecta aut imperfecta.

19. Tres gradus perfectam periodum conſtituunt. Limes igitur ad periodos ita ſe habet: ut in oratione commata vel cola ad eaſdem.

20. Imperfecta eſt periodus, quæ imperfecto ternario locorum conſtat: ut in periodis 10, 1000. In prima duo ſunt loca: in ſecunda ſunt quatuor, quæ ternarium unitate ſuperant.

21. Rurſus periodus alia ſimplex eſt, alia cõpoſita. Simplex eſt, quæ unico ternario graduum conſtat. Compoſita, quæ plus quàm unico ternario graduum conſtat.

22. Numeratio recta, ut & omnis ſupputatio fit per propoſitiones: qui docendi modus veteribus imprimis fuit uſitatus: & nunc ad uſum in Arithmetica reuocatur.

23. Propoſitiones ſunt duplices, theoremata & problemata. Theorema eſt propoſitio mathematica, in qua aliquid, quod rei ſubiectæ per ſe ineſt aut accidit, ad contemplandũ datur.

24. Problema eſt propoſitio mathematica, in qua aliqua rei ſubiectæ affectio aut paſſio quæritur.

25. Theorematum finis eſt cognitio & demonſtratio. Problematum vero ποίησις, id eſt, conſtructio. Hinc clauſula finalis theorematum eſt, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, quod demonſtraſſe opor-

oportuit. Problematum vero, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, quod feciſſe oportuit. Problemata ſolēt per infinitiuum enunciari: theoremata per indicatiuum.

Problematis vero etiam demonſtratio additur non propter finem: ſed ut iuſtè factum eſſe oſtendatur, quod in problemate propoſitum erat.

26. Propoſitio docetur per demonſtrationem. Sunt autem partes demonſtrationis Mathematicæ ſex, πρότασις, ἔκθεσις, διορισμὸς, κατασκευὴ, ἀπόδειξις, συμπέρασμα.

πρότασις eſt propoſitio demonſtrationis, quæ monet quibus poſitis & conceſſis, quæ quæſita ſint demonſtranda. Ac diuiditur quælibet perfecta πρότασις in δεδόμενον καὶ ζητούμενον. Δεδόμενον eſt prior pars, quæ conſtituit ſubjectum, de quo aliquid affirmatur vel negatur, Proclo ὑπόθεσις. ζητούμενον eſt altera pars propoſitionis, quæ oſtendit, quid in ſubiecto ſit demonſtrandum.

ἔκθεσις, datum ſeu ὑπόθεσιν in propoſitione ſeparatim à propoſitione repetit.

Διορισμὸς, tertia pars, explicat quale ſit quæſitum: eſtque quaſi propoſitionis concluſio.

Κατασκευὴ quarta eſt demonſtrationis pars, quæ præparat & accommodat ad demonſtrationem accidentium ea, quæ neceſſaria ſunt, & requiruntur.

Ἀπόδειξις eſt præcipua pars demonſtrationis, quæ per prima nota & conceſſa demonſtrat id, quod de dato demonſtrandum & oſtendendum proponitur.

Συμπέρασμα eſt concluſio, quæ demonſtrationem ad quæſitum accommodat, idq; rectè demonſtratũ confirmat.

AXIOMATA.

1. **Numerus eſt infinitus non actu ſed potentia. Poteſt** enim

enim augeri in infinitum: diuidi autem & minui non item. Vnitas enim est ἀδιαίρετον. Contra magnitudo in infinitum augeri non potest: diuidi autem in infinitum potest. Mundo enim nihil maius est.

2. Naturalis series numeri est incipere ab unitate, & inde progredi ad decem: & hinc rursus ad unitatem redire, & sic progredi in infinitum. Primus autem numerus proprie dictus, binarius est: deinde cæteri, qui sequuntur pro multitudine unitatum, ex quibus constant ordinem habēt. Quilibet autē ab unitate tanquam parte sua nomen ducit.

3. Numerus actionem & passionem non habet, scilicet numerans. Numeratus enim ratione qualitatum efficax est.

4. Numerus est σύγχρονον magnitudini: prior autem magnitudine, & ordine naturæ & dignitate. Est enim & principium omnium sensibilium & intelligibilium: & numerandi scientia facit differentiam hominis.

5. Notæ numerales aut considerantur sine respectu locorum, & tum singulæ per se significationem suam repræsentant: aut referuntur ad loca, quorum respectu significationem suam augent ratione decupla. Quod si loca non resarcirent, notæ infinitæ esse deberent. Vox mille toties apponenda figuris puncto notatis, quot membra sequuntur illam, quæ enunciatur: idq; proprietatis gratia fiat variatis casibus, dicaturq; in primo puncto millia: secundo millena: tertio & sequentibus millies aduerbialiter.

6. Facilior vero redditur numeratio, si pro primo puncto ponatur o: & 1 pro secundo puncto: & 2, pro tertio: & 3 pro quarto, & ita deinceps. Toties enim mille proferendū monet, quot unitates in figura, quæ supra membrum pronunciandum posita est, continentur.

7. Ordo naturalis numeri est à dextra versus læuam. Prima igitur

igitur figura dicitur, quæ ordine retrogrado seruato prima est. Vltima est extrema à parte sinistra.

8. Illud membrum, quod ultimum est, versus sinistram, in enunciatione primum est.

9. Cifra per se nihil significat, sed valorem numeri tantũ auget. In numeris igitur locum postremum nunquam obtinet: cum nihil sequatur, cuius significationem augeat.

10. Primus & secundus quilibet numerus, id est, monadicus cum proximo quoque in omni periodo coniunctim proferuntur: eamque ob causam lunula coniunguntur.

11. Numerare per partes, & per totum est idem.

χόλιον. Axioma sumtum ex sententia communi. Omnes partes simul sumtæ sunt æquales toti. *Vel*, totum est æquale omnibus partibus simul sumtis. Cõgruit vero & cum prima prop. lib. 2. Nam quod Euclides ibi docet Geometricè, idem & Arithmeticè cõmuniter efferri potest, hoc modo. Totum ductum in alterum totum, tantum producit, quantum idẽ totum ductum in omnes partes alterius totius. Et *rursus*. Totum ductum in alterum totum, tantum producit, quantum partes unius ductæ in partes alterius. Hinc versus.

Totorum producta solent cito prodere partes.

Quod per tota nequis per partes discere debes.

Quod vero de multiplicatione dicitur, idem de alijs instrumentis supputationis intelligi potest, nempe de additione, subtractione, multiplicatione diuisione. In his enim omnibus aut unum tantum totum secatur, aut utrumque. Et rursus sectio alterutrius vel utriusq; potest fieri in partes quotcunq; & qualescunque.

12. Si ab æqualibus æqualia subtrahantur, residua sunt inter se æqualia. Et contrà. Si residua totius & partium simul additarum, vel in se ductarum sunt æqualia, totũ est æquale

C parti-

partibus simul sumtis, vel in se ductis. V. G. 24. & 8. faciunt 32. Hic duo sunt æqualia, totum 32, & partes 24, & 8. Iam subtrahatur unus idemq; numerus à toto & partibus, quoties fieri potest: sitq; nouenarius. Remanebunt utrobiq; quinque. Ex quo apparet veram summam inuentam esse.

13. Similia numerant similia.

Σχόλιον. Vnitates additæ aggregant unitates: decuriæ decurias: centuriæ centurias: millenarij millenarios. Sic floreni florenos: nummi nummos. Eadem est ratio subtractionis.

14. Si totum partium duplicatarum est æquale duplicato toti dimidiorum, totum est æquale partibus simul sumtis. Porisma quintæ prop. lib. 7. E. G. Sint duæ partes 24. & 8. Hæ seorsim duplicatæ faciunt 48. & 16, quæ addita constituunt 64. Totidē etiam facit totum, nempe 32, duplicatum.

15. Partes æqualium à se inuicem subtractæ decussatim, relinquunt æqualia. E. G. Sint 32, quorum partes sunt 24, 8: & 18, 14. Hæc subtracta à se inuicem relinquunt æqualia, nempe 10, & 10.

16. In supputatione per partes quælibet nota monadica est, peracto opere singuli numeri cum valorem habent, quem loca significant.

POSTVLATA.

1. Petatur quencunque locum notari puncto.
2. Petatur quamcunque periodum ab alia periodo virgulis vel punctis interiectis distingui.
3. Petatur subunionem seu lunulam esse faciendam.
4. Petatur in supputatione per partes operandum esse.
5. Petatur similes sub similibus collocandos esse. Sic rectam lineam subducendam; & similia, quæ in κανονισμοῖς occurrunt.
6. Petatur numeros in ipsis articulis, ut decadibus, secandos esse ut commodior fiat supputatio.

7. Petatur figuras supputatas non esse delendas: sed transuersis signandas uirgulis, ut errore facto numerus non abolitus recognosci possit. Arithmeticis est cancellare, transfodere characteres, obelisco transfigere, notas inducere.

NVMERATIO.

πρότ. Numerus propositus quantumuis multis notis cõstans vulgari ratione enunciandus est.

Ἐκθ. *Disponantur* confuso ordine decem figuræ numerorum sic.

˙   ˙   ˙   ˙
6, 9 8 1, 7 3 2, 4 5 0.

Δ. *Oportet* hunc numerum propositum vulgari ratione enunciare.

Κατασκ. *1 post.* Notetur quartus quisque puncto nempe 6120. Vel, supra 0 ponatur 0, supra duo 1. supra unum 2. supra 6 tria: ut sciatur in eo charactere, ubi punctum ponitur esse primum locum: & toties mille proferri, quoties unitates in figura, quæ supra ponitur, continentur.

2 post. Periodus quælibet, quæ constat tribus locis, virgula vel puncto interiecto distinguatur, ut initium nouorũ locorum cognosci possit.

3 post. Numerus interpunctus cũ proximè sequenti subunione seu lunula coniungatur, ut simul pronunciandos esse sciatur. Erit igitur numerus propositus ad legendum sic præparatus.

3   2   1   0
6, 9 8 1, 7 3 2, 4 5 0

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* numerum propositum ita legendum esse vulgari modo.

Primum membrum sic. Sexies millies millena millia.

Secundum membrum sic. Nongenta octoginta unum millena millia.

Tertium membrum sic. Septingenta triginta duo millia.

Quartum membrum sic. Quadringenta quinquaginta.

Ἀπόδειξις. *1. Syll. 7. sententia.* Ordo naturalis est à dextra versus lævam. Ergo in *prima periodo* 0 primum. 5 secundum. 4 tertium locum obtinet. In *secunda periodo* 2 primum. 3. secundum. 7 tertium. Et sic in tertia & quarta periodo. Estque 0 prima figura, 6 ultima.

2 Syll. 7 sententia. Notarum prolatio fit ab ultima figura. Ergo prolatio incipit à senario, qui est figura ultima.

3 Syllog. 17. definitio. Figura consistens in primo loco valet seipsam: in secundo loco valet seipsam decies: in tertio centies. Hic sunt quatuor figuræ, quæ primum locum tenent, nempe 6120. Tres, quæ secundum, nempe 835. Tres itidem, quæ tertium, nempe 974. Ergo quatuor figuræ primo loco positæ significant sex, unum, duo, nihil. Tres secundo loco positæ significant octoginta, triginta, quinquaginta. Tres tertio loco positæ significant nongenta, septingenta, quadringenta.

4 Syllog. 6. Communis sententia. Vox mille toties apponenda figuris interpunctis, quot membra sequuntur illam, quæ enunciatur, vel quantus est numerus supra eum positus. Hic sunt tres figuræ interpunctæ 612. Ergo *prima* sic effertur. Sexies millies millena millia: quia sunt tria membra, quæ illam sequuntur, vel quia supra eam ponitur tria. *Secunda sic.* Semel millena millia: quia duo membra sequuntur, vel supra eam ponitur 2. *Tertia sic.* Duo millia, quia unum tantum membrum sequitur, vel quia supra hunc numerum 1 ponitur.

νομπίς. Numerus igitur propositus vulgari ratione enunciatus est, quod fecisse oportuit.

SCHOLIVM.

Prolatio numerorum quintuplex est: Vulgaris, Græca, Latina, Italica, Mixta: de quibus prolixè libro de numeratione multiplici, vetere & recenti egimus.

VVLGARIS est, quæ quartū quenq; interpungit: initio facto à dextris: deinde à sinistris versus dextros progrediendo, primo puncto notatum per millia exprimit: secundo per millena millia: tertio per millies millena millia: quarto per millies millies millena millia: atque ita deinceps, tot millia dicendo, quot sunt puncta.

GRÆCA EST, quæ quintum quenq; interpungit: initio facto à dextris: deinde à sinistris versus dextros progrediendo primo interpunctum per simplices myriades pronunciat: secundo interpunctum per duplices myriades: tertio interpunctum per triplices myriades, & sic deinceps. Cæteros vero, ut in vulgari ratione, per millenarios & centenarios: ut sit numerus propositus, qui soliditatem terræ in stadijs continet. 98'4063'6446'9497'. Hunc numerum Græca ratione sic effero. Stadiorum myriades triplices nonaginta octo: duplices quater mille sexaginta tres: simplices sexies mille, quadringentæ quadraginta sex: & stadia nouies mille: quadringenta nonaginta septem.

LATINA EST, quæ primò quartum & sextū interpungit: deinde à sexto, iterum quartum quenq;: & in sexto centena millia pronunciat: & millena millia centenis usque in immensum accumulans, semper ea in se replicat: ut sit numerus propositus filiorum Israël ad bellum aptorum, & viginti annos excedentium 6'03'550'. Hunc numerum Latina ratione sic profero. Sexies centena tria millia, quingenti, & quinquaginta.

ITALICA EST, quæ quartum quenq; interpungit: & in septimo itidem interpuncto milliones pronunciat: eosq; auctis ad septimū locis subinde repetit: ut sit numerus propositus magni thesauri Sardanapali Monarchæ Assyrij, qui habuisse scribitur coronatos 154'000'000'000'. Hunc numerum Italica ratione sic effero. Centum quinquaginta quatuor millia millionum. G. Agricola eundem thesaurum ducatos Hungaricos habuisse refert, 57'3200'275'757', hoc est, quinquagies septem millena millionum, trecentos milliones: ducenta septuaginta quinque millia: septingenta quinquaginta septem.

MIXTA EST, quæ conſtat tribus modis, Vulgari, Græco & Italico ſimul. Interpungit igitur quartum quenq; ſupra: quintum autē quenque infra. Septimus enim & vulgari ratione millena millia: & Italicè millionem ſignificat: ut ſit numerus propoſitus ſummuum, quos Salomon fecit in ædificando templo Hieroſolymitano, qui à Theodoro Bibliandro fuiſſe ſcribuntur coronatorum, 1 3'6 9 5' 3 8 0'0 5 0'. Hunc mixta ratione ſic profero. Decies ter mille, ſexcenti nonaginta quinque milliones, triginta octo myriades, & quinquaginta. Sola latina ratione per centum millia ſic effero: 1 3 6'9 5 3'8 0'0 5 0'. Centies tricies ſexies millies, nongēties quinquagies ter centena millia, octoginta millia, & quinquaginta. Centum vero millia coronatorum vulgus tonnas auri vocat: unde & ſic numerus datus legi poteſt. Cēties tricies ſexies mille: nōgentæ quinquaginta tres tonnæ auri: octingenties mille & quinquaginta coronati. In eiuſdem templi theſauris uno eodemq; tempore 3 0 1 0'0 0 0 0 0, id eſt, ter millies decies centena aureorum millia condita fuiſſe traduntur: ſiue ter mille & decem tonnæ auri: ſiue trecenti & unus milliones auri.

EPARITHMESIS, altera pars numerationis, ex ARITHMESI dependet. Qui enim concinnè numerum enunciare poteſt: is non difficulter prolatum quoque dextrè ſcripſerit, quamuis hoc difficilius videatur. Eſt autem res una, ſed ordo reciprocus. Vt enim in enunciatione characterum ſcriptorum ita in ſcriptione characterum non ſcriptorum loca numerantur: & primùm puncta locorum commoditatis gratia notantur: tum characteres loco punctorum inferuntur.

Exemplum in numeratione vulgari.

Sit numerus vulgari ratione enunciatus. Ter millena millia, nongenta triginta ſeptem millia, quingenta viginti octo. Hic cum ſint ſeptem numeri, totidem puncta notantur cum ſuis virgulis & punctis ſupra poſitis, hoc modo.

. . . .

Quibus in cifras conuerſis, numerus per cifras notatus eſt ſic.

3 9 3 7 5 2 8.

Exem-

Exemplum in numeratione Græca.

Herodotus hiſtoria VII. ubi Xerxis copias bellicas, quas ille innumerabiles ferè, quantæ in nulla hiſtoria leguntur alia, in Græciam adduxit, recenſet, ſic ait. *οὕτω πεντακοσίας τε μυριάδας, καὶ εἴκοσι καὶ ὀκτὼ, καὶ χιλιάδας τρεῖς, καὶ ἑκατοντάδας δύο, καὶ δεκάδας δύο ἀνδρῶν ἤγαγε ξέρξης ὁ δαρείου μέχρι σηπιάδος καὶ θερμοπυλέων*, hoc eſt, Sic quingentas viginti octo myriades, ter mille ducentos & viginti viros duxit Xerxes, Darij filius, uſque Sepiadem & Thermopylas. Hic cum iterum ſint ſeptem numeri (cifra enim in viginti ſine additione expreſſa continetur) totidem puncta notantur cum ſuis virgulis, & punctis ſupra poſitis, hoc modo.

$$1\ 1\ \underset{\smile}{\dot{1}}\ 1\ 1\ 1\ \underset{\smile}{\dot{1}}.$$

Quibus in cifras conuerſis, numerus per cifras notatus eſt ſic.

$$5\ 2\ \underset{\smile}{\dot{8}}\ 3\ 2\ 2\ \underset{\smile}{\dot{0}}.$$

Exemplum in numeratione Latina.

Sit ſcribenda ſumma miliarium, quibus tota terræ ſoliditas conficitur, nempe vicies ſexies millies, ſexcenties vicies novies centena undecim millia, ſexaginta quinque. Eſſe autem hunc numerum prolatum Latino more, hinc apparet, quod centenorum millium fit mentio. Hic cum ſint decem numeri: (Nam cifra omittitur, in pronunciando, quæ inſeri debet, ut poſt undecim ſequatur ſexaginta, eò quod notam quæ unitatem ſignificat, nota decuriæ ſequi non poteſt, niſi per intermediam cifram) totidem puncta notantur cum ſuis virgulis & punctis ſupra poſitis, hoc modo.

$$\underset{\smile}{\dot{1}}\ 1\ 1\ \underset{\smile}{\dot{1}}\ 1\ 1\ \underset{\smile}{\dot{1}}\ 1\ 1\ \underset{\smile}{1}.$$

Quibus in cifras conuerſis numerus per cifras notatus eſt ſic.

est sic. 2 6 6 2 9 1 1 6 6 5.

ALIVD. Plinius lib. 33. c. 10. M. Crassus Quiritum post Syllam ditissimus, qui negabat locupletem esse, nisi qui annuo reditu legionem tueri posset, possedit in agris bis millies sestertiûm: quæ sequenti modo in antiquo manuscripto exemplari leguntur: H S M M, quæ bis millies centena millia sestertiûm nummum significant. Hic numerus cum nouem locis constet (Bis millies enim est quartus locus à centenis millibus, quæ sextum locum occupant) totidem punctis notatur hoc modo.

1 1 1 1 1 1 1 1 1. Quibus in characteres Arithmeticos conuersis numerus Arithmeticè sic notatur.

2 0 0 0 0 0 0 0 0. Nam quandocunque veteres per adverbia in hunc aut similem modum, decies, duodecies, vicies, centies aut millies sestertiûm, pronunciant, compendio utentes, toties ellipticôs loquuntur, & centena millia nummûm sestertiûm significatum volunt: sic dicunt decies sestertiûm, pro decies centena millia sestertiûm.

Multò vero facilius prolatus numerus literis siue Hebraicis, siue Græcis, siue Latinis: & characteribus siue Chaldaicis, siue Ægyptijs scribitur: ut docetur in libello de multiplici numeratione.

ADDITIO.

πρότασις. Cognitis partibus alicuius totius, ijsq; omnibus, totum earum per additionem dabitur.

Quatuor sunt casus. Aut enim duæ figuræ, quibus partes exprimuntur, inter se addendæ sunt, aut alteruter datorum est simplex: aut uterque coniunctus est.

ἔκθ. primi casus. *Sit linea a b, cuius duæ partes 4, & 8.*

a |—— 8 ——| c —— 4 ——| b

Δ. Oper-

Δ. Oportet *has partes uno numero complecti.*

Κατ. *Summa ex communi naturæ iudicio, vel sectione quaternarij in duos binarios cognoscitur, ut emergat decas per sextum postulatum, hoc modo 8, 10, 12. Ad octonarium enim addatur primus binarius, & fit decem: rursus alter binarius ad 10, & fit 12.*

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico totam lineam a b esse 12. partium.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ sequentium casuum.

ἐκθ. Secundi casus. *Sit linea a b, cuius duæ partes 8 & 24.*

a |——24——|——8——| b.

Δ. Oportet *has partes uno numero complecti.*

Κατ. *Similis sub simili collocatur: ut 8 sub 4. Vtraq; enim figura unitates significat. Altera pars, nempe 2, quæ 20. significat, sola relinquitur, cum decadicam respondentem non habeat. Iam additio fit partium vel ut totorum, vel ut partium.*

Totorũ sic. 24	*partium sic* 8
8	16
Summa -- 32.	5
	3
	32 -- *Summa.*

Vterq; enim numerus, ut totus in partes sectus est: 24 in 8 & 16: octo in 5 & 3. Productum igitur totorum est æquale producto partium.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico totam lineam a b esse 32 partium.*

Ἀπόδειξις δι' ἑνός.

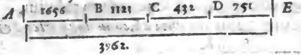
5 axioma. *Numerare per partes, & per totum est idem. Siue specialius sic. Duorum numerorum unius partes alterius partibus additæ, simul æquales sunt summæ duorum numerorum, siue totorum.*

In dato exemplo fit additio partium, vel ut totorum, vel ut partium. Ergo summa summæ æqualis est.

ἐκθ. tertij casus. *Sit data linea a e, diuisa in quatuor partes, a b, b c, c d, d e. Tota linea repræsentat totum tempus à mundo condi-*

to usq; ad Christum natum, quod ignoratur. Partes illius sunt quatuor partes totius temporis, quæ notæ sunt, hoc modo.

A B, à condito mundo usq; ad diluuium 1656.
B C, à diluuio ad captam Troiam 1123.
C D, inde ad conditam urbem Romam 432.
D E. Hinc ad Christum natum. 751.



Δ. Oportet *has quatuor partes uno numero complecti, ut sciatur totum tempus à mundo condito usq; ad Christum natum, quod tota linea A E representat.*

Κατασκευή. *1. Similes, qui sunt eiusdem ualoris, similibus secundum rectam lineam subijciantur, id est, unitates unitatibus, denarij denarijs, & sic deinceps, donec numerus, quiscunq; is sit, deficiat.*

2. Recta linea subtendatur, cui collectus numerus subscribatur. Hac linea partes & totum à se inuicem discernit.

3. Initium supputationis fiat à dextris, id est, minimis, & sic ad reliquas procedatur.

4. Bini semper addantur ex natura indicio: ac si proueniat numerus duorum vel plurium characterum, primo scripto, alter mente teneatur, & sequenti ordini conjungatur: & si adsit, tertius tertio.

5. In talibus exemplis, ubi ex additione unius loci tres vel plures figuræ prodeunt, consultius fuerit operationem partiri seorsim in duas aut tres, vel quotlibet partes, quibus additis, singulatim ipsarum summa postea colligantur in unum, ne memoriæ fiat confusio.

6. Cum ad ultima perueneris, digitum in loco denarij (si fuerit) mente teneri non oportet, sed expressè poni, quod tunc numeri nulli sequuntur, quibus addi debeat, hoc modo.

1565

1656
1123
432
751

3962.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico totam lineam A E, id est, totum tempus à condito mundo usq; ad natum Christum esse annorum 3962: siue totos annos 3962. esse aquales quatuor his partibus, 1656, 1123, 432, 751.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 11. axioma. *Numerare per partes & per totum est idem. Hic sunt quatuor addendi, tanquam tota & horum totorum partes sunt monades, decades, hecatontades, chiliades. Ergo numerare per monades, decades, hecatontades, chiliades est idem quod per quatuor addendos.*

2 Syll. 13. axioma. *Vnitates addita aggregant unitates, vel solas, vel decades, vel mistos. Similiter decuria decurias: centuria centurias, & sic deinceps.*

Hic sunt quatuor unitates 1, 2, 3, 6: totidem decuria 5, 3, 2, 5, totidem centuria 7, 4, 1, 6, duo millenarÿ 1, 1. Ergo per natura indicium 1 & 2 sunt tria, & tria sunt sex, & 6 & 6, sunt 12 unitates: vel monstrando singulas figuras sic 1, 3, 6, 12. Iidem proueniunt numeri colligendo per denarios sic, 1, 3, 6, 10, 12, pro primo. Rursus 5 & 3 sunt 8. & 2 sunt 10, & 5 fiunt 15, decuria: vel sic, 5, 8, 10, 15, pro secundo. Iterum 7 & 4 sunt 11, & 1 sunt 12, & 6 fiunt 18 centuria: vel sic, 7, 10, 11, 12, 18, pro tertio. Deniq; 1 & 1, sunt duo millenarÿ, pro quarto loco, hoc modo.

Vnitates	12.
Decuria	150
Centuria	1800
Millenarÿ	2000.

3 Syll. 13. axioma. *Vnitates additæ aggregant unitates : decuriæ decurias, &c. Hic sunt 12 unitates, 15 decuriæ, 18 centuriæ, duo millenarij. Ergo per naturæ iudicium totum est tres millenarij, nouem centenarij, sex decuriæ, & duæ unitates, hoc modo.*

12
150
1800
2000
3962.

4 Syll. 12. definit. *Partium in unam summam collectio est additio. Ex quatuor datis partibus lineæ A B totum, siue tota linea inuenta est. Ergo hæc inuentio partium est additio.*

συμπέρασμα. Quatuor igitur partes datæ lineæ in unum collectæ, 3962 constituunt, & totum 3962 est æquale his quatuor partibus 751, 432, 1123, 1656, idq; per additionem.

SCHOLIVM.

Additionem nos Summirn vocamus. Græci πρόσθεσιν & σύνθεσιν; Latini etiam compositionem : quæ tamen vox aliàs additionem, aliàs multiplicationem significat.

Est autem multiplex : alia numeri abstracti, alia concreti : alia numerorum eiusdem appellationis, alia diuersæ. Et alia plena, alia truncata. Plena est cum numerus addendus tot habet figuras, quot numerus; cui fit additio. Truncata, quæ contrà. Et alia duorum, alia plurium addendorum, qui tamen tanquam duo considerantur.

Rursus additionis duæ sunt partes : διδόμενον, & ζητούμενον. διδόμενον, sunt duo vel plures numeri, qui addendi vocantur : Germanis die posten. ζητούμενον est totum, quod & summa & aggregatum : Græcis ὅλον, σύνολον, συναγόμενον, & κεφάλαιον dicitur : ὅλον ἀπὸ τοῦ ὅλου. Germanis das Facit/ siue Capital. Nota summæ totius apud Græcos talis est. Ζ , id est, σύνολον. Et rursus addendorum alius est superior, alius inferior. Eum cui fit additio, siue sit superior, siue inferior, recipientem quidam vocant.

Maiorem numerum superiore loco collocare non est necessarium : operationem tamen commendat, minusque erroneam facit. In additione linea numeris datis vel supponatur, vel supraponatur ut sit locus, quò summa scribenda veniat. Ordo

Ordo iustæ collectionis duplex est: unus syntheticus, alter analyticus. Syntheticus est, ut initium supputationis fiat à dextris, id est, primis seu minimis numeris, & sic ad reliquos procedatur, de quo antea. Analyticus est, ut initium additionis fiat à sinistris, id est, maximis numeris, & sic ad minores fiat progressio. Hic ordo cum seruatur, bini quidem sumuntur, ut antea, sed si proueniat numerus duorum vel trium characterum, totum integrè scribitur, ut in exemplo præcedente, hoc modo.

1	6	5	6
1	1	2	3
	4	3	2
	7	5	1
2	8	5	2
1	1	1	
3	9	6	2

Vltimæ notæ sunt 1 & 1, quæ faciunt 2, & hæc infra lineam scribo directè sub 1. colligens deinde loci sequentis figuras, habebis 18: hic scribo 8 sub 7, secundo loco & 1 sub 2. Additis postea decadibus proueniunt 15, hic scribo 5 sub 5, loco tertio. Postremo collectis monadicis fiunt 12: pono 2 sub 1, & 1 sub 5. Deinde ducatur linea prior velut parallela, includens huius collectionis septem figuras, quibus additis, ut in prima inductione, dispositisque sub inferiori linea, fit summa 3962, sicut antea.

Hic posterior modus addendi, quamuis altero egeat: & sit prolixior, minus tamen obnoxius errori: in quem facile cadunt, qui numeros tractant, præsertim grandiores.

In additione diuersarum specierum, cum numeri excrescunt, ita ut constituant secundæ speciei valorem, ea in sequentem ordinem reijci debet: id quod expeditè à perito diuisionis fieri potest.

EXEMPLVM.

Fingo me exposuisse diuersis mensibus.

Primo	4. fl.	13. cr.	7. n.
Secundo	7. fl.	19. cr.	9. n.
Tertio	13. fl.	8. cr.	6. n.
Quarto	8. fl.	21. cr.	10. n.
Summa	32 fl.	61. cr.	32. n.

Cum autem 32 n. faciant 9. cr. & unum obolum: relinquo obolum ultimo loco, & 9 additis ad 61 fiunt 70, à quibus subtractis 60 cr qui faciunt unum florenum, summæ florenorum addendum, relinquunt 10. cr. Summa igitur correcta erit hæc,

33. fl. 10. cr. 1. obolus.

Plura exempla huius præcepti ex libro de asse & partibus assis peti possunt: & ex appendice huius libri, ubi variæ quæstiones proponuntur.

Probatio quæsiti inuenti pluribus modis institui potest: ut reiteratione operis: adhibitione utriusq; ordinis, subtractione, multiplicatione, diuisione.

Reiteratio operis est, ut additione peracta repetitio fiat intra mentem, disquirendo diligenter singulas summæ figuras, num sit erratum in aliquo.

Adhibitio utriusq; operis est, ut fiat additio ordine tum synthetico, tum analytico. Nam si summæ inter se consentiant, opus rectũ esse constabit. Huic cognata est additio inuersa, quæ additionem factam ab inferioribus figuris versus superiores, à superioribus versus inferiores instituit, vel contra, & explorat num summæ inter se consentiant.

Subtractio duplex est, generalis & specialis.

Generalis est, in qua ex duobus addendis unus à summa subtrahitur, & reliquus addendorum relinquitur: E. G.

Sint duæ partes 24 & 8, quæ additæ faciunt totum, 32. Iam si subtraham 8 unum addendorum à 32, toto, relinquitur 24, alter addendorum. Quod si subtraham 24 alterum addendorum à 32, toto, remanebit 8, unus addendorum.

Quod si plures fuerint addendi: primùm maior à summa: deinde minores à residuis subtrahuntur, & nihil relinquitur, ut in exẽplo superiore.

3962
1656
————
2306
1123
————
1183
432
————
751
751
————
0.0.0.

Specialis est, in qua ex addendis & summa abijcitur pro arbitrio numerus, imprimis 9 & 7. Nam si ex æqualibus æqualia subtracta fuerint, residua erunt æqualia. Est autem probatio per 9 certior, quia hic numerus æquali excessu notas collectas simplici valore æstimatas numerat. Septenarius hanc proprietatem nouenarij non habet: ideoq; aliter per septenarium quàm in nouenario procedendũ est. Septenarius enim non hinc inde remouetur, sed à binis semper notis sibi vicinis, donec ad finem unius seriei perueniatur. A residuis vero ultimis, si opus sit, remouendus iterum est 7. Exploratur igitur utrobiq; num residua sint æqualia ex abiectione 9 & 7. Quod si nullum sit residuum, o scribitur. Æqualitas enim indicium probæ: inæqualitas falsæ operationis indicium est, E. G. in exemplo nostro, 9 à tribus addendis subtracta relinquunt 2; totidem idem à toto subtractus relinquit. Sic 7 à tribus addendis subtracta relinquunt sex, & totidem subtracta à toto, sic. 6 ✕ 6

Multiplicatio est duplicatio partium & totius. Nam secundum 14. axioma, siue porisma quintæ propositionis, lib. 7. partes duplicatæ faciunt productum æquale producto totius duplicati, E. G. Productum duplicati totius in exemplo nostro est 7924. Tantum quoque est productum partium duplicatarum, hoc modo.

1656.	1123.	432.	751.
2	2	2	2
3312.	2246.	864.	1502.

3312.
2246
864
1502
7924.

DIVISIO, ut subtractio, fit per quemcunque numerum, sed similiter. Nam diuisis addendis per quemcunque numerum, idem prouenit quotus, qui diuiso toto per eundẽ emergit: ut in exemplo nostro diuisis addendis per 9 emergunt quoti hoc modo.

$\frac{1656}{9}$ (184. $\frac{1123}{9}$ (124$\frac{7}{9}$. $\frac{532}{9}$ (48.

$\frac{751}{9}$ (83$\frac{4}{9}$. Qui additi faciunt 440$\frac{2}{9}$.

Tantus etiam quotus est, diuiso toto nempe 3962. per nouenariũ.

Eadem æqualitas quotorum emergit diuisis addendis & toto per septenarium.

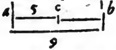
Est vero & alia diuisio probatio quæsiti inuenti, nũ verum sit: hoc modo. Summa addendorum, ex quibus unus sit diuidendus, alter diuisor,

diuisor, æqualis est producto, quod emergit ex ductu quoti unitate aucti in diuisorem. E. G. Sint addendi 1656 & 9, Summa est 1665. Hanc summam esse veram sic probo. Diuisis enim 1656 per 9 emergit 184. Iam 185 (Addita enim unitas quaternario est) ducta in 9 faciunt 1665, summam supra positam.

SVBTRACTIO.

Πρότασις. Dato toto & una parte, reliqua pars per subtractionem dabitur. Totidem sunt casus subtractionis, quot additionis.

Ἐκθ. primi casus. *Sit linea a b, diuisa in duas partes, a c, & c b, tota linea sit 9 : & una eius pars, nempe a c, 5.*



Δ. Oportet *ex his duobus datis reliquam partem c b cognoscere.*

Κ. Residuum *inuenitur vel ex communi natura iudicio, vel subtractione siue totorum siue partium.*

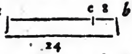
	Totorum sic.	*Partium sic.*	
	9	4.	5.
	5	2.	3.
Residuum	4.	2	2
		Additio 2	
		Residuum	4.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico reliquam partem c b esse quatuor.*

Ἀπόδειξις. 11 axioma. *Numerare per partes & per totum est, idem.*

Hic sunt duo numeri 9 & 5, unus maior, alter minor, quorum partes sunt 4 & 5 : item 2 & 3. Ergo 2 & 3 sublata à 4 & 5, relinquunt 2 & 2, quæ coniuncta faciunt 4 & 5 & per consequens residuū residuo æquale est.

Ἐκθ. Secundi casus. *Sit linea a b, diuisa in duas partes a c, c b. Tota linea sit 24, & una eius pars nempe c b sit 8.* Δ. Opor-



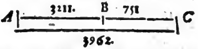
Δ. Oportet *ex his duobus datis reliquam partem c a cognoscere.*
Κατασκευὴ eadem *est qua primi casus. Inuenitur enim residuũ vel ex communi naturæ iudicio, vel subtractione siue totorum siue partium.*

Totorum sic.	24	*Partium sic.*	8 -- 16
	8		5 -- 3
Residuum --	16		3. 13
		Additio.	3
		Residuum:	16

Ἀπόδειξις est eadem, *quæ præcedentis casus.*

Ἐκθ. tertij casus. Sit data linea A C, *diuisa in duas partes A B & B C. Tota linea A C repræsentat tempus à condito mundo usq; ad natum Christum: & una eius pars, nempe B C, tempus vrbis Romæ conditæ.*

Διορ. Oportet *ex his duobus datis reliquam partem B C, nempe tempus ab urbe condita usq; ad natum Christum cognoscere.*



Κατασκευή.

1. Maior superiore loco ponitur, minor inferiore.

2. Similes sub similibus, & dextri sub dextris ponantur.

3. Sub duobus numeris à sinistra dextram versus linea ducatur.

4. Initium subtractionis fiat à monadicis figuris.

5. Subtrahitur aut æqualis a b æquali: aut minor à maiore, aut maior à minore. Si æqualis, residuum est nota circuli, quæ sub lineola substrata scribitur. Si minor, singula notæ relinquunt singulas. Si

maior, residuum inuenitur, primum mutatione denarij: deinde additione mutuati ad subtrahendum proximum, hoc modo.

A C. Totum tempus à condito mundo usq; ad natũ Christum 3962.
A B. pars totius à condito mundo usq; ad urbem conditam 3211.

B C. Reliqua pars totius ab urbe condita usq; ad natũ Christum 751.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico annos 751. esse reliquam partem totius, id est, tempus ab urbe condita usq; ad natum Christum.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 5. Axioma. *Numerare per partes & per totum est idem. Hic sunt duo tota, numerus maior, & minor, & horum totorum partes sunt monades, decades, hecatontades, chiliades. Ergo numerare per monades, decades, hecatontades, & chiliades est idem, quod per duo tota inæqualia, maius & minus.*

2 Syll. 13. axioma. *Vnitates subtractæ ab unitatibus relinquunt unitates: similiter decuriæ decurias, & sic deinceps. Hic sunt duæ unitates, 1 & 2. Totidem decuriæ, 1, & 6, totidem centuriæ, nempe 2 & 9: totidem millenarij 3 & 3. Ergo auferendo 1 à 2, restat unitas, quæ infra lineam directè sub 1 ponitur, pro primo.*

Rursus 1 à 6 restant 5, decuriæ, quæ rectè sub 1 ponuntur, pro secundo. Iterum 2 à 9 restant centuriæ, quas directè sub duobus pono, pro tertio. Deniq; 3 à 3 restat 0 millenarius, qui quod locum ultimum occupat, ideoq; nihil significat, omittitur.

συμπέρασμα. *Dato igitur toto & una parte, reliqua pars innotuit per subtractionem, quod fecisse oportuit.*

σχόλιον.

Subtractio est numeri, quo maior minorem superat, inquisitio. Græci ἀφαίρεσιν & ὑπεξαίρεσιν vocant. Latini etiam deductionem & subductionem: Germanis abzug.

Tot illius species, quot additionis: totidemque partes.

Datum sunt duo numeri, maior & minor. Maiorem quidam abundantem vocant. Vterq; de numero figurarum & de postremis versus sinistram numeris inter se collatis æstimatur. Nam si numerus numero

numero superscribitur. ille minor est, cuius figurae prius deficiunt. Si vero tot figuras habet unusquisque, quot reliquus, tunc si alterius ultima maiorem digitum significat, ipse maior est. Est autem plerunque unus: interdum plures. Quod si numerus ex pluribus numeris: vel plures numeri ex pluribus, vel ex uno numero sint subtrahendi, addendi ante subtractionem erunt plures numeri illi, à quibus fieri debet subtractio, in unam summam: item plures illi, qui subtrahi debent, inter se addendi, ut hinc duo tantum numeri emergant. Maior totum est: minor una pars totius. Quaesitum est tertius, qui ignoratur. Hunc Graeci vocant λοιπὸν, λειπόμενον, ὑπεροχήν. Latini differentiam, excessum, reliquum, residuum. Est autem altera pars totius. Germanis der rest.

Ex datis numerus maior semper supra: minor infra poni debet. Numerus vero per subtractionem reliquus, vel subnotari, vel supernotari potest.

In subtractione commodè particula à vel de utimur, dicendo 2 à 9: vel 2 de 9, manent 7.

Ordo iustae subtractionis duplex est: unus syntheticus, alter analyticus. Syntheticus est, ut subtractio fiat à dextris ad sinistros. Analyticus est, à sinistris ad dextros qui priore & facilior est, & diuisioni, cognatae speciei, similior. Nam & perplexam mutuo accipiendi difficultatem tollit, & à sinistris progreditur, ut diuisio; ut in priori exemplo hoc modo.

```
  3962
  3211
  ----
  0.751.
```

Sic enim dicimus, 3 à 3 restat 0. 2 à 9 restant 7, 1 à 6 restant 5, 1 à 2 restat 1. Id tamen in hac methodo obseruandum, ne numerum antecedentem subducamus, quin prius consequentium rationem habuerimus.

Cum aliqua nota numeri inferioris maior fuerit superiore in methodo synthetica, mutuò sumendi à sequenti duae sunt methodi. Nam superiori numero decem memoriter adiungimus, ab eoq; sic aucto inferiorem minorem numerum deducimus, & aut proximè sequenti versus sinistram superiori punctum adijcimus, quod unitatem ab eo subtractam significat: vel proximè sequenti versus sinistram inferiori punctum adijcimus, quod illi unitatem additam denotat: quod videtur esse commodius. Tum minoris numeri distantiam à 10 accipias: atque eandem cum superiore nota coaceruatam lineae subijcias, punctumq; proximè superiori, vel inferiori, ut ante, adijcias.

Si in superiori numero aliquæ figuræ non habent respondentes figuras in numero inferiori, ita ut illis nihil subtrahatur, illæ sub linea reponantur.

In subtractione diuersarum specierum, cum numerus inferior nõ potest subtrahi à superiori, utpote minore, vel deficiente, resoluenda est unitas speciei sequentis in partes eius, à quo non potest fieri subtractio: & addenda ei: vel si nulla adsit, partes in locum vacuum reponendæ. V. G.

Fingo me habuisse florenos 48, cr. 9 num. 2. Exposui autem duabus vicibus prima fl. 25. cr. 10. n. 2. Secunda fl. 18. cr. 7. n. 1. Innotescet igitur etiam reliqua pars per additionem & subtractionem, hoc modo Primum addo duas partes sic.

25 fl.	10 cr.	2 n.
18 fl.	7. cr.	1. n.
43 fl.	17 cr.	3. n.

Deinde subtraho sic.

48 fl.	9 cr.	2 n.	
43 fl.	17 cr.	3 n.	
4 fl.	51 cr.	1 n.	1 ob. Residuum.

Si cifra fuerit in numero inferiore, numerus superior integer est subscribendus. Sin cifræ in superiore ordine fuerint, tũ unitas à proximè sequenti numero auferenda est, & pro eo scribendus numerus unitate minor, & loco cifrarum tot nouenarij, quot sunt cifræ, ut si sint 99 subtrahenda à 400023, residuum est hoc. 399924.

Probatio subtractionis varijs modis institui potest, nimirum additione, subtractione, dimidiatione, diuisione, ut probatio additionis.

Additio est, si residuum datæ parti adijcias, & totum, id est, numerus à quo subtractio facta est, proueniat. Omnes enim partes simul additæ totum restituunt.

Subtractio triplex est, aut iterata, aut nouenarij, vel septenarij, aut residui à toto.

Iterata est, quæ subtractionem factam intra mentem repetit, & num recta sit explorat.

Subtractio nouenarij est, si primum ex toto, deinde ex duabus partibus reijciuntur nouem: quoties fieri potest: & residuum utriusque, & totius & partium æquale fuerit. Tum enim quæsitum esse rectè inuentum demonstratio ex posteriore probat.

Subtractio residui à toto est, si residuum subtractum à toto datam partem relinquit.

Multis

Multiplicatio est duplicatio totius & datæ partis. Nam si data pars duplicatæ à toto duplicato auferatur, relinquetur duplum residui. Dimidium igitur erit residuum.

Diuisio est primùm totius : deinde partium per quemcunque numerum. Quoti enim si æquales fuerint, residuum rectè inuentum est : ut in nostro exemplo totius per 7 diuisi quotus est 566. Idem est quotus duarum partium per 7 diuisarum.

MVLTIPLICATIO.

πρότασις. E datis partibus certo numero sumendis totum per multiplicationem dabitur.

Sunt autem quatuor casus. Aut enim duæ figuræ occurrunt, quæ inter se additæ denarium non constituunt, & harum productum ex communi naturæ indicio & sola additione cognoscitur, ut bis duo sunt quatuor, bis tria sunt sex, & sic deinceps. Aut superat denarium : & harum productum ex abaco Pythagoræ, de quo in fine dicetur : aut ex subsidio memoriæ, facto pro prosthaphæresin, inuenitur. Aut alteruter datorum est simplex, aut uterq; coniunctus est.

ἔκθεσις secundi casus. *Sint duæ figuræ 8 & 9, quæ inter se additæ superant decem. Faciunt enim 17.*

Δ. Oportet *has duas figuras inter se artificiosè per prosthaphæresin multiplicare, & productum cognoscere.*

Κατασκευή. Primum *octonarium, ut minorem, nouenario ut maiori subijcio.*

Secundò suam cuiq; distantiam à denario ad latus adsigno. 9 autem à denario distat unitate : 8 ab eodem distat, binario.

Tertio, quatuor hos numeros coniunctione duplici inter se mutuo χιαστῶς *deuincio : & subtus lineam in longum exporrigo.*

Quartò duco distantiam unam in alteram ; & productum eidem loco subijcio. Dico igitur semel duo sunt duo : quæ subscribo.

Quinto distantiam alterutram, id est, utrumcunq; volo, ab opposito numero subtraho, sic dicens, 2 à 9 manent 7 : vel 1 ab 8, manent similiter 7. Hoc residuum versus sinistram scribo, quod cum præce-

denti numero coniunctum duarum figurarum productum ostendet, hoc modo,

9	1
8	2
7	2

Quod si vero ex mutuo ductu distantiarum emergat numerus duabus notis scribendus, sinistra eius cum secunda per diametralem subductionem reperta, est coniungenda sic.

7 ---	3
6 ---	4
4	2.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico multiplicationem duarum figurarum 8 & 9 efficere 72.*

Ἀπόδειξις.

Duæ sunt partes demonstrationis. Vna, æquatio. Productum enim duorum digitorum cum signis plus est æquale producto orto ex denario in se ducto. Hinc fiunt 100. Nam 9 + 1 : & 8 + 2 sunt idẽ quod 10. Secundo quæritur productum multiplicando distantias inter se & subtrahendo partes antea additas, cum signo pluris. Productum enim duorum digitorum est æquale rectangulo gemino comprehenso sub distantijs, & residuo distantiæ à digitis in denarium ducto. Est igitur hic processus.

1 Syll. sententia communis. *Quilibet digitus est æqualis denario cum signo minus tot unitatum, quot idem à denario distat. Hic est digitus nempe 9, qui à denario deficit unitate. Ergo 9 est æqualis 10 --- 1. Eadem ratione octonarius est æqualis 10 --- 2.*

Vel sic. Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis. Decem est totum, cuius partes sunt 9 & 1 : item 8 & 2. Ergo partes 9 & 1, item 8 & 2 idem sunt quod decem. Ex hoc syllogismo apparet ratio differentiarum, cur ad latus dextrum scribantur. Sunt enim partes duorum totorum inter se æqualium.

2 Syll. Axioma undecimum. *Totum ductum in totum, tantum producit, quantum partes unius in partes alterius. Hic sunt duo numeri*

meri 10 & 10: & primus denarius secatur in 9 & 1: alter in 8 & 2. Ergo producta partis unius in partes alterius sunt aqualia producto ex totis, & sic 18 ex bis 9: 2 ex semel duobus: 80 ex octies decem coniuncta faciunt totidem, quot 10 in 10, nempe 100.

Geometricè sic. *Sit quadratum a b c d, cuius unum latus a b secetur in a e, & e b: a e sit 9: e b unum. Sic alterum latus a d similiter secetur in a f & f d: a f sit duo: f d 8. Ducatur autem a f in a e, & fiet rectangulum a b, 18: sic e b in e h: & fiet rectangulum e g 2. Rursus f d in f g, & fiet rectangulum f c 80. Ergo omnes partes simul collecta, ut rectangula a b, e g, f c sunt aquales toti quadrato a c 100. Productum ex duabus distantijs in se ductis primo loco ponitur. Iam auferenda sunt partes aqualium, qua antea cum signo pluris addita fuerunt in aquatione: ut restituant numeros ad multiplicandum propositos. Sic igitur procedimus.*

3 Syll. 15. axioma. *Partes aqualium à se inuicem decussatim subtracta relinquunt aqualia. Hic sunt partes duorum aqualium: primi 9 & 1. secundi 8 & 2. Totum enim utriusq; est 10. Ergo ha partes à se inuicem decussatim subtracta relinquunt aqualia, nempe 7 & 7. Et per consequens rectangulum i c est aquale rectangulo a l. Hinc apparet cur distantia alterutra ab opposito numero subtrahatur: & residuum unum sit aquale alteri.*

4 Syll. sententia multiplic. *Data longitudine & latitudine rectanguli dabitur illius area per multiplicationem. Longitudo rectanguli i c nempe i k est 10, latitudo i d 7. Ergo per multiplicationē area rectanguli i c est 70.*

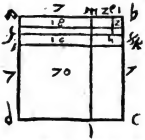
Per eundem syllogismum probatur area rectanguli a l totidem esse partium, nempe 70. Est enim latus a d 10: latus a m 7 partium. Hac est causa, cur 7 secundo loco versus sinistram scribatur sine cifra. Ibi enim 70 significat.

Vel hoc modo. In aquatione digitis addita fuerunt 1 & 2: qua tria faciunt, Iam 3 subtracta à 10 relinquunt 7. In operatione igitur 2

tur 2 significant rectangulum primum e g: 7 rectangulum secundū i c, vel a l.

συμπέρασμα. *Duæ igitur figuræ, quæ inter se additæ superant 10 inter se per προσθαφαίρεσιν multiplicatæ sunt, & productum inuentum, quod fecisse oportuit.*

πόρισμα. *Hinc sequitur, ut productum inueniri possit etiam aliter, nimirum multiplicatione distantiarum. Productum enim primum digitum ostendit. Deinde additione distantiarum. Productū enim subtractum à 10, alterum digitum patefacit: ut in dato exemplo semel 2 sunt 2, 1 & 2 sunt 3, quæ subtracta à 10 relinquunt 7.*



ἐκθ. tertij casus. *Sit tectum rectangulum, cuius duæ dantur partes, longitudo & latitudo: longitudo habeat tegulas 125. latitudo vero tegulas 9. Hic unus datorum numerorum est simplex: alter compositus.*



Διορ. Oportet *ex his duabus partibus inuenire totum, id est, quot tegulas totum tectum habeat: siue quantum faciant 125 nouies sumta: vel quantum faciant 9 sumta centies vicies quinquies.*

Κατασκευή. *1.* Multiplicator, *nempe 9, ponatur infra primam figuram multiplicandi, nempe sub 5. 2, Quinq; multiplicans ducatur insu-*

in superiores singulas faciendo initium à primis: & productum infra lineam scribatur, non aliter quàm in additione, primam figuram scribendo suo loco: secundam (si ex multiplicatione producatur deceas, vel numerus mistus) mente retentam addendo sequenti, hoc modo. Quinquies nouem sunt 45. scribo 5, excrescentem quaternarium reseruo. Rursus bis 9 sunt 18, & quatuor mente repetita, sunt 22, scribo 2, excrescentem binarium reseruo. Rursus semel 9 sunt 9 & 2 ante reseruata sunt 11, quæ integrè subscribo, hoc modo.

$$\begin{array}{r} 125 \\ 9 \\ \hline 1125. \end{array}$$

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico totum tectum continere tegulas 1125. Tantum enim est productum ex ductu 9 in 125.*

Ἀπόδειξις δι' ἑνός.

11 Axioma. *Totum ductum in alterum totum, tantum producit, quantum idem totum ductum in omnes partes alterius totius.*

Hic sunt duo tota, nempe 9, & 125, & partes alterius totius sunt 100, 20, 5, quæ seorsim in 9 ducta & addita faciunt 1125, hoc modo.

Totum primum --- 125.	*Partes totius*	100 --- 900
Totum secundum 9		20 --- 180
		5 --- 45
		Productum --- 1125.

Ergo 1125 est productum 9 in 125.

συμπέρ. *Duorum igitur numerorum, quorum alter simplex est, alter coniunctus, inter se ductorum productum inuentum est, quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. quarti casus.

Sit tectum rectangulum, cuius duæ dantur partes, longitudo & latitudo: longitudo habeat tegulas 2070; latitudo 204. Hic uterq; datorum numerorum compositus est.

Δ. Oportet ex his duabus partibus inuenire totum, id est, quot tegulas totum tectum habeat.

Κατασκ. eadem est, quæ in præcedenti casu. Tot vero sunt operationes, quot sunt multiplicatores, nisi prima figura multiplicandi sit cifra, aut in multiplicante cifra, siue primo siue alio quocunq; loco ponatur. Tunc enim cum ex ea multiplicatione proueniat 0, superfluum esset, talem ordinem scribere, ut in exemplo sequenti.

```
  2070
   204
  ----
  8280
 4140
------
422280
```

Hic cifram primum subscribo, & præpono primo ordini. Deinde inferiorem numerum nominans per aduerbium dico, quater septem fit 28: pono 8 infra lineam directè sub 4: duo vero mente retenta addo sequenti, dicens, quater 0 est cifra, & duo fit duo: pono 2 sub 0. Rursus quater duo fit 8: pono 8 directè sub 2. Sequitur deinde cifra, quæ non multiplicat, sed sub seipsam directè subscribitur, omissa multiplicatione cum numeris multiplicandi. Tertiò dico, bis septem sunt 14, pono 4 sub 8. Rursus bis 0, fit 0, & 1 quod teneo fit 1, pono 1 post 4. Postremo dico, bis 2 sunt 4, pono 4 loco sequenti post unum. Ducta deinde linea sub infimis figuris à sinistra in dextram addo numeros inter duas lineas constitutos, & habeo 422280.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. Dico totum tectum continere tegulas 422280.

Ἀπόδειξις eadem quæ præcedentis casus, ut & κατασκευή. Vt autem antea totum ducebatur in partes alterius totius: sic nunc partes unius ducuntur in partes alterius, hoc modo.

Totum --- 2070. Partes --- 2000 --- 70

Totum --- 204. Partes --- 200 -- 4.

Producta

Producta.	*Producta particularia.*
2000	400000
200	8000
Prod. 400000	14000
20000	280
4	422280.
Prod. 80000	
70	
200	
Prod. 14000	
70	
4	
Prod. 280.	

Facilius autem productum inuenitur, si alteruter tantum, nempe maior secetur in plures partes, easq; minores, præsertim in denarios. Multiplicatio enim digitorum in denarium sola adiectione cifræ perficitur: ut in præsenti casu sic.

			Additio.
Totum.	204	204	408000
Partes totius maioris.	2000	70	14280
	408000.	14280.	422280.

Summa æqualis priori.

συμπέρασμα. *Duorum igitur numerorum, quorum uterq; compositus est, inter se ductorum, productum inuentum est, quod fecisse oportuit.*

σχόλιον.

Multiplicatio est proportionata additio. Vna enim pars toties sibiipsi accumulatur, quot in altera sunt unitates: ut ex multiplicatione 8 in 24 procreantur 192. Sicut igitur unitas est ad multiplicantem, sic multiplicandus ad procreatum, directè & ἐναλλάξ, hoc modo; 192.24.8.1. Græci πολλαπλασιασμὸν & κεφαλισμὸν vocant: Latini etiam compositionem. Geometræ ductum numeri in numerum, &

rum, & πολλ. ἀριθμὸν ἐπ᾽ ἀριθμὸν German. vielfaltigen.

Est autem compendium additionis, V. G. Quæritur quantum octies 24 faciant. Hoc productum inuenitur sola additione, eaque prolixiore, 24 octies scribendo, & numeros toties scriptos addendo: unde summa prodibit 192. Id vero multiplicatione breuius perficitur sic,

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 192. \end{array}$$

Est autem duplex: alia numerorum eiusdem speciei, alia diuersarum specierum. Et alia unius multiplicantis, alia plurium. Et rursus alia duplatio, alia triplatio, & sic deinceps.

Rursus multiplicationis duæ sunt partes: datum & quæsitum. Datum sunt duo numeri, multiplicans & multiplicandus: ille πολλαπλασιάζων, hic πολλαπλασιαζόμενος dicitur. Geometris uterq; πλευρά, latus parallelogrami: in quadratis radix. In oblongis multiplicandus est longitudo: multiplicans latitudo. Hinc propositio tertia Geometricæ sic effertur. *Data longitudine & latitudine rectanguli, datur illius area per multiplicationem.* Multiplicatio enim numeri in numerum procreatio aliquid simile rectangulo parallelogrammo.

Quæsitum est productum, Græcis γινόμενος, Latinis etiam factus & compositus: ut 6 componitur ex 2 & 3: Geometris ἐπίπεδον, seu area: in quadratis δύναμις: vulgo zensus: ut cum dicitur, ἡ διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς.

Quiduis licet in quoduis multiplicando ducere.

Nihil refert uter duorum sit multiplicans, an multiplicandus, per 16 septimi. Si duo numeri sese mutuo multiplicantes procrearint alios, propagati ex ipsis sunt inter se æquales. Est enim perinde discere, ter quinque sunt 15, & quinquies tria sunt quindecim. Relatiuorum igitur instar, multiplicantis & multiplicandi est reciprocatio.

Datis duobus numeris inuicem multiplicandis commodius maiorem collocaueris supernè, & minorem infernè.

Multiplicans aduerbio exprimitur, multiplicandus nomine.

Ordo multiplicationis duplex est, syntheticus & analyticus. Syntheticus est à dextra sinistrorsum, de quo antea. Analyticus est à sinistra dextrorsum, ut figura multiplicantis prima sub extrema superioris ac multiplicandi rectè ponatur: postea facto initio ab extrema inferioris eiusdem digiti in extremam superioris ducatur: & sic ad cæteros pergatur: subscriptis suo loco productis: deinde idē fiat cum cæteris digitis inferioris in omnes digitos superioris ducendis, & productis similiter subscribendis: hoc modo.

```
     2070
     204
   --------
    4040
     1
     08080
        2
   --------
    422280
```

Quot sunt figuræ multiplicantes, tot sunt ordines numerorum inter duas lineas, nisi inter multiplicantes fuerit cifra.

Si cifra vel cifræ in principio alterutrius numeri fuerint, abiectis omnibus illis, multiplicandi sunt numeri reliqui inter se, & producto numero apponendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ.

Si cifræ fuerint in principio utriusque numeri, reiectis cifris, multiplicentur reliqui numeri, & producto apponantur tot cifræ, quot reiectæ sunt in utroq; numero.

Cifra in medio numero multiplicante si reperiatur: eadem in loco productorum subscribitur, & sequentis digiti multiplicatio inchoatur.

Cifra nihil agit, hoc est, neq; addit neque subtrahit, nec multiplicat, nec diuidit: sed locum supplet, & valorem digitorum denario auget. Dicimus igitur bis o est nihil, o in 2 facit nihil: o in o facit nihil.

Vnitas nec multiplicat, nec diuidit: addendo verò numerum auget, maioremq; facit.

Multiplicaturus igitur numerum aliquem per denarium, centenarium, millenarium, eius numeri primæ figuræ præpone tot cyphras, quot habet numerus multiplicans, & absoluta est multiplicatio.

Binarius parem in additione & multiplicatione potestaté habet. Cum enim per se multiplicatur, nihilo maiorem numerum efficit, quàm cum sibi additur.

Si in multiplicando unus digitus bis positus fuerit, tunc prioris productum pone sine noua multiplicatione iterum suo loco, qui ei debetur.

Si numerus quantuscunque per quinq; multiplicandus fuerit, sume eius numeri dimidium, incipiendo ab ultima figura: & si prima figura fuerit impar, præpone dimidiatæ summæ quinarium: sin par, præpone cifram: & habebis productum, ut in sequenti exemplo, in quo quæ præcesserunt compendia adhibentur omnia.

```
      2120406|0.
       71057|0.
   14842842|00
   10602030
  21204060
 14842842
150669689142 00.
```

Probatio iustæ multiplicationis poteſt fieri varijs modis: additione, ſubtractione, multiplicatione, diuiſione.

Additio probat multiplicationem, quia multiplicare eſt aliquid ſæpe ſumere.

Subtractio eſt remotio 7 vel 9 à duobus datis & à quæſito. Si enim reſiduum reſiduo congruat, veram operationem fuiſſe indicat: ſin minus, falſam.

Multiplicatio duplex eſt, aut iterata, aut inuerſa. Iterata eſt, quæ operationem iterum mente repetit, & veritatem illius explorat. Inuerſa eſt, quæ primū ſynthetico, deinde analytico ordine utitur: & num utrumque productum conſentiat, confert.

Diuiſio multiplicationis examen certiſsimum eſt, ſed ipſo quod examinatur, opere prolixius. Nam ſi numeri duo multiplicati numerum aliquem conſtituunt: uterque poterit illum exactè diuidere: ita ut alter ſit diuiſor, alter quotus. Eſt igitur examen hoc. Productum diuidatur per multiplicantem, & redibit multiplicandus: vel per multiplicandū, & redibit multiplicans, ſi bene facta fuit operatio.

Operatio multiplicationis duorum digitorum non tantum per proſthaphæreſin ſupra traditam, ſed pluribus alijs modis perfici poteſt: ex quibus ſunt & hi.

1. Per 11 axioma generale, & ſpeciale tertiū. V.G. Quæritur quātum valeat octies nouem? diuide alterum datorum in partes quotcunque, ut 8 in 1.2.2.3. Singulis poſtea partibus in 9 ductis facies 72, hoc modo.

```
      9
 1. 2. 2. 3. | 8.
      9
     18
     18
     27
     72.
```

Idem

Idem efficies utrisq; distractis, hoc modo.

```
4.  5. | 9
4.  4. | 8
-------
  16
  20
  16
  20
-------
  72.
```

2. Per distantiam digitorum datorum à denario: decussationem quatuor numerorum, & subtractionem alternam digitorum denario auctorum, toties, quoties differentia indicat. V.G. Quæritur quātum valeant octies nouem. Distantia à denario est 1, & 2. Decussatio est hæc.

```
9 \/ 1
8 /\ 2.
```

Auferatur bis 9, id est, 18 à 90, restant 72. Auferatur semel 8 ab 80, restant similiter 72.

3. Per solam multiplicationē differentiarum inter se, & datorum digitorum additione, & subtractione unitatis à producto. E.G. Quæritur quantum faciant nouies octo. Operatio est hæc.

```
 9 ..... 1
 8 ..... 2
---------
17     2.
```

Operatio multiplicationis plurium digitorum breuior, eaque sine additione fieri potest, si multiplicans distrahatur in duos numeros, qui in se ducti multiplicantem faciunt: & unus primum in multiplicandum ducatur: deinde alter in productum. Sit E.G. 5678 ducendum in 24. Hic 24 potest distrahi, duobus modis: primum in 4 & 6: deinde in 3 & 8. Vtrique enim in se ducti 24 faciunt. Operatio igitur, eaque ἰσοδυναμοῦσα est hæc.

```
  5678          5678          5678
     4             3            24
------        ------        ------
 22712         17034         22712
     6             8         11356
------        ------        ------
136272        136272        136272
```

In numeris magnis, quales sunt in tabulis sinuum pro faciliori multiplicatione colliguntur primum omnia producta multiplicandi per 9 digitos: & deinde ex hac tabella excerpuntur, quibus opus est. Producta autem fiunt per solam additionem, ut apparet in sequenti exemplo.

SINVS,

SINVS. 1	3408.	
2	6816	
3	10224	
4	13632	
5	17040	
6	20448	
7	23856	
8	27264	
9	30672	

Et additio & multiplicatio est coaceruatio: differunt autem inter se. Additio enim est coaceruatio numerorum datorum unius absolutè sumti cum altero. Multiplicatio autem est numerorum datorum unius proportionaliter sumti coaceruatio id est, toties quoties in datorum altero unitas reperitur. In multiplicatione diuersarum specierum eâdem cautelâ opus est, quam supra adhibendam esse diximus.

Fingo me tribus vicibus exposuisse 14 fl. 11. cr. 3. n. Facta multiplicatione numeri propositi per tria proueniunt 42. fl. 35. cr. 2. n. Hæc est summa expensarum ter factarum.

DIVISIO.

πρότασις. Dato producto duorum numerorum, & uno numero, numerus alter per diuisionem dabitur.

Sunt autem duo casus. Aut enim unus numerus est simplex, & alter compositus: aut uterque compositus.

ἐκθ. primi casus. *Sit productum 365, & unus numerus 2, qui simplex est.*

Διορ. Oportet *ex his duobus datis alterum numerum cognoscere, qui ductus in 2 constituat 365.*

Κατασκευή. Primum *maior numerus 365 collocetur loco superiori: minor n. 2 loco inferiori: sic ut 2 rectè sub 3, nempe ultima figura diuidendi ponatur.*

2. Interroga teipse dicendo, 2 quoties continetur in 3, siue, quod idem est, 3 quoties habet in se 2, respondebis, semel.

3 Quo-

3. *Quotum à diuidendo separa per signum semicirculi, siue lunaris lineola,& scribe 1,modico post semicirculum spacio.*

4. *Multiplica diuisorem 2 in 1,dicens semel 2 fit 2,quæ de tribus ablata,relinquunt 1.*

5. *His dictis cancella diuisorem 2 & ipsum 3: quod fit actis obliquè per medium utriusq; lineis.*

6. *Scribe rursus diuisorem 2 rectè sub figura 6, ac dicito, 2 quoties continetur in 16? inuenies 8: pone 8 rectè iuxta 1: dicendo bis 8 fit 16: quibus de 16 sublatis,restat 0.*

7. *His dictis cancella 2 & 16, ductis sicuti prius, in transuersum lineis.*

8. *Tandem scribe iterum diuisorem 2,rectè sub charactere, ac dicito,2 quoties continetur in 5: inuenies bis.*

9. *Pone 2 post semicirculum rectè iuxta 8: dicendo,bis duo fit 4: quibus de 5 subtractis restat 1.*

10. *Residuum scribe supra lineam,& diuisorem sub eadem in morem fractionis,hoc modo.*

x 1
365 (182½.
222

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico alterum numerum, qui ductus in 2,constituat 365,esse 182½. Et tot diebus dimidius annus, isq; communis constat.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. definitio. *Diuisio est compendium subtractionis. Ergo in diuisione diuisor & quotus sunt partes: prior nota,altera ignota & quæsita: diuidendus est totum.*

2 Syll. Definitio. *Numerus indicans,quoties pars data subtrahi possit à toto est quotus.*

Hic unitas est numerus indicans partem datam,nempe binariū, posse semel subtrahi à toto,id est,à ternario.

G *Ergo*

Ergo unitas est quotus, siue pars quæsita.

3 Syll. sententia. *Productum partium in se ductarum, subtractum à toto indicat residuum.*

Hic productum 1 & 2 partium in se ductarum, quod est 2, subtractum à 3, id est, toto relinquunt 1.

Ergo unitas est residuum. Hic syll. indicat caussam, cur diuidentes multiplicatione & subtractione utamur. Per eadem probatur 8 esse secundum quotum: eò quod 2 præcisè possint octies subtrahi à toto, nempe à 16. Sic 2 esse tertium quotum, eò quod 2 à quinario possit bis subtrahi, remanente unitate.

4 Syll. sententia 16. *In supputatione per partes qualibet nota monadica est, peracto opere singuli numeri eum valorem habent, quem loca suppeditant. Hic sunt tres quoti, 1, 8, 2, & residuum ½. Ergo peracto opere valor numerorum pro ratione locorum est hic: centum octoginta duo cum semisse.*

συμπέρασμα. Ex duobus igitur datis, producto, numero composito, & uno numero, eoq́ simplici, inuentus est alter numerus, quod fecisse oportuit.

De secundo casu.

ἐκθ. Secundi casus. *Sint duo numeri compositi productum 897, & unus numerus 32.*

Δ. Oportet *ex his duobus datis alterum numerum cognoscere, qui ductus in 32 constituat 897.*

Κατασκευή. Si plures *fuerint numeri diuisoris, hic requiritur inuentio primum quoti: deinde residui. Quotus minor, quàm possit, sæpe sumendus, si comes diuisoris primi sit maior. Inuentio residui fit multiplicatione quoti cum numeris diuisoris. Deinde subtractione producti à numeris diuidendi. Hic occurrit δοκιμασία quædam particularis, quæ subtractionem tum præcedit, tum sequitur. In præcedente debet summa productorum multiplicationis esse minor, suprascriptis numeris. In sequente δοκιμασία debet diuisor esse maior residuis*

residuis supra scriptis. Erit itaq; exemplum sic.

1. 3 diuisor rectè sub 8, & 2 comes diuisoris sub 9 collocetur.

2. Inuentio primi quoti fit sic. Quoniam 8 continet in se tria bis, scribe 2 post semicirculum.

3. Scribe quotum 2 sub figuris diuisoris, & duc eundem in omnes figuras partitoris, sic dicendo. Bis duo fit 4: scribo 4 sub 2. Deinde bis 3 sunt 6, scribe 6 sub 3. Fit productum 64. Hic occurrit prima δοκιμασία. Est autem productum, nempe 64 minus supra scriptis numeris diuidendi, nempe 89. Est igitur quotus per primam δοκιμασίαν rectè sumtus.

4. Subtrahe productum à figuris diuidendi sic. 4 de 9, restat 5: 6 de 8 restat 2. Residuum totum est 25. Hic occurrit altera δοκιμασία. Est autem residuum, nempe 25, minus diuisore, qui est 32. Est igitur quotus per secundam δοκιμασίαν quoq; rectè sumtus. Hac est prima operatio: sequitur altera.

Iterum dispone diuisorem, ita ut 3 sit sub quinq;, & 2 sit sub 7. Et quoniam in 25 continetur 3 octies: scribe post semicirculum 8 dextrorsum iuxta 2: deinde progredere multiplicando, subtrahendo, & explorando, ut antea. Erit autem productum multiplicationis 256, quod minus est figuris diuidendi. Residuum erit 1. quod est minus numeris diuisoris, qui sunt 32. Hinc colligitur per utranq; δοκιμασίαν quotum esse rectè sumtum.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 897 per 32 diuisis prouenire 28 cum una trigesima secunda, sic ut residuum 1 stet super linea, & sub eadem diuisor 32. hoc modo.*

897
322 ($28\frac{1}{32}$.
3

συμπέρασμα. Dato igitur producto duorum numerorum & uno numero, alter est inuentus, quod fecisse oportuit.

σχόλιον.

Diuisio est quotæ partis inuentio. Cum enim quæro u. g. 7 quæ

sit pars de 28 nihil aliud est quàm diuisio 28 per 7. Est autem compendium subtractionis, toties subtrahens diuisorem à diuidendo, quoties fieri potest. V. G. Quæritur quoties 7 in 28 habeatur. Hæc continentia inuenitur sola subtractione, eaq; prolixiore, hoc modo.

```
      2 8
1     7
   ------
      2 1
2     7
   ------
      1 4
3     7
   ------
        7
4     7
   ------
        0
```

Hic 7 subtracta sunt quater: & sic quotus est 4. id vero diuisione perficitur breuiùs sic.

Græcis μερισμὸς & μέτρησις. Geometris παραβολή, id est, comparatio. Latinis etiam partitio, Germ. theilung. Datis enim duobus numeris maior in tot partes distribuitur, quot sunt unitates in minori.

Differunt autem diuisio & numeratio. Diuisio est genus: numeratio, species, ex quibus utrunque una eademque operatione perficitur. Numerus numerum numerare dicitur, quando eum ita diuidit, ut tollatur prorsus, id est, nullam minutiam vel residuum relinquat. Metiri etiam vocant.

Differt autem à subtractione. Subtractio enim docet, qua ratione minor numerus à maiore semel subtrahatur. Diuisio vero rationem tradit, qua minor numerus à maiore aliquando non semel, sed alis quoties, idq; compendiosè possit auferri: ut si cupiam scire, quoties 6 in 24 contineatur, hic multis subtractionibus opus esset: quod diuisio breuius & facilius inuenit ut antea dictum. Præterea subtractio à datorum uno alterum absolutè sumtum aufert: diuisio vero à datorum numerorum uno alterum proportionatè, hoc est, toties, quoties in altero contineri potest, sumtum aufert.

Partes diuisionis sunt datum & quæsitum. Datum sunt duo numeri, inæquales, diuidendus & diuisor. Quæsitum est quotus.

Diuidendus appellatur verticalis, Græcè μετρούμενος, & μεριζόμενος, Geometris ἐμβαδὸν, latine area.

Diuisor est diuidendi mensura quædam, ut ulna panni, cuius longitudinem metitur. Græcis μετρῶν, Latinis etiam partitor. Geometris μῆκος τῆς δοθείσης γραμμῆς, Lat. datum latus. Hinc propositio quarta Geometricè sic effertur. *Data area & uno latere datur alterum latus per diuisionem.*

Quotus

Quotus est diuidendi pars quota, cognominis diuisori, ut secunda, si diuisor sit 2: tertia si 3; quarta, si 4, & sic deinceps. Barbarè quotiens. G. Vallæ diuisorius: Glareano indicatorius: alijs exiens & proueniens, & continentia: eò quod index est, quoties diuisor in diuidendo continetur: & quòd ex partitione prouenit. Geometræ appellant τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς, id est, latus quod accomodatum dato lateri (id est, diuisori) parallelogrammum rectangulum describit. Idem & radix dicitur.

Diuisio multiplex est: alia per duo, alia per alios numeros. Diuisio per duo, dimidiatio dicitur: quæ & prima, & omnium facilima species diuisionis est. Neque enim, si quis velit compendiosè supputare, utetur diuisore scripto & semicirculo: sed unica tantum linea sub diuidendo posita, ut in exemplo sequenti, incipiendo ab ultima figura sic. Dimidium de 11 est 5: dimidium de 14 sunt 7, & sic deinceps.

$$\frac{1\,1\,4\,1\,0\,3\,1}{5\,7\,0\,5\,1\,5\tfrac{1}{2}}$$

Eadem ratione omnis diuisio simplex, ubi diuisor est figura unica, breuiter absolui potest. Quinam vero numeri per singulas monadicas numerari posint, ostendunt certæ regulæ, de quibus postea.

Nihil refert ex datis, diuisor vel diuidendus maior sit vel minor. Diuidendus autem semper maior est diuisore in numeris absolutis: & tum quotus est maior unitate. Idem minor diuisore esse potest in numeris numeratis, & tum quotus numerus minor est unitate fractionem gignens: in qua minor maiori superscribitur, interiecta lineola, ut si quinque floreni diuidantur per 7, fiunt $\frac{5}{7}$. Errant igitur, qui diuidendum diuisore minorem esse non posse contendunt.

Potest vero & sine fractione diuidendus minor per maiorem diuidi: si ille in species sub se contentas ducatur: ut earum productum diuisore maius eius sectionem sustinere posit. Exempli gratia, sunt diuidendi floreni quinque inter sex: quoniam in numero quinario senarius non habetur: resoluo florenum in tot cruciferos, quot ille æstimatur: deinde quinque in 60 duco: unde enascitur numerus, qui diuisus per sex, quotum profert 50, qui indicat quinquagenos cruciferos singulis deberi.

Numerum per æqualem sibi diuidi improprie dicimus. Quòd si occurrat in diuisione, tunc quotus semper est unitas.

Numerus numerum numerare dicitur, quando eum ita diuidit, ut nullum residuum relinquat.

Qui numerus totum alium metitur, & unam eius partem, etiam

 reliquam

reliquam metietur. Et qui numerus metitur omnes partes, metitur etiam totum. Nullus maior numerus minorem metitur.

Vnitas est pars aliquota cuiuslibet numeri. Omnem igitur numerum numerat, id est, metitur toties, quot sunt in ipso unitates: nullu autem componit vel diuidit. Nam multiplicando nihil auget: diuidendo nihil minuit.

Vnitas est ἀδιαίρετος, id est, indiuisibilis. Hinc Boetius imparem numerum non posse diuidi in duo æqualia colligit: & Arithmetici totam theoreticæ partis Arithmeticæ tractationem huic fundamento superstruunt.

Binarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius figura prima ab ipso binario numeratur. Si igitur primæ figuræ, numeratoris & denominatoris sint pares numeri, communis partitor semper erit duo.

Ternarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius singulæ figuræ pro primis acceptæ, & ad se additæ ab ipso ternario numerantur: ut numerum 43221 metitur ternarius: quia notæ huius numeri simul collectæ efficiunt 12, quem ternarius metitur.

Quaternarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius ipse partem numerat illam, quæ sub duabus figuris eius primis continetur: qualis est 1112. Numerus enim sub duabus primis notis comprehensus est 12, quam 4 metitur.

Quinarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius prima figura fuerit 5 vel c.

Senarius quemlibet numerum parem componit & numerat, quem numerat ternarius: ut 13242 metitur tam sex quam tria.

Septenarius quemlibet numerum componit & numerat, qui colligitur ex tribus, sex, nouem aut 12 terminis proportionis duplæ, quadruplæ, aut sedecuplæ, ut 693 metitur septenarius, quia colligitur ex terminis sex proportionis duplæ & quadruplæ 1. 4. 16. 32. 128. 512.

Octonarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius ipse numerat partem illam, quæ sub tribus primis figuris eius continetur. E. G. 16904 & 16936. In his & 904, & 936 per 8 diuidi potest.

Quod si numerus par diuidatur per 8: & relinquantur 4: talis numerus carebit octaua parte, & habebit quartam.

Nouenarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius singulæ figuræ pro primis acceptæ & simul additæ ab ipso nouenario numerantur. E. G. Numerum 324531 metitur 9, quia notæ eius simul iunctæ efficiunt 18, quæ à 9 numerantur.

Siau-

Si autem numerus impar habet partem nonam: is habebit & tertiam tantum: ut 27 quæ non possunt diuidi per sex, sed per 3 & 9.

Denarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius prima figura fuerit 0. Et sic de alijs. Numerus enim ab alio factus ab eodem numerari potest. Et 12 numerat omnem numerum quem senarius.

Denique omnis numerus, quem non metitur aliquis digitorum, non habet partem quotam, præterquam ab aliquo imparium numerorum denominatam: & tales vocantur numeri primi, quos sola unitas metitur, ut tria.

Diuisionem exercemus dicendo quoties, ut 6 in 9 quoties? semel. Eandem absoluimus tribus literis q. m. s. quære, multiplica, subtrahe.

Si solus diuidendus habet aliquot cifras in principio, & nulla figura significans ex diuisione relicta fuerit: tunc antequam ea absoluatur, ponendæ sunt post quotum omnes cifræ numeri diuidendi nondum deletæ: ut in diuisione 22500 per 45, quotus est 500.

Si solus diuisor habet in principio aliquot cifras, facilis erit diuisio; si tot cifræ ad dextram diuidendi ponantur, & tot notæ, quot sunt cifræ, ab extremis diuidendi notis remoueantur: & reliquus tantum numerus per diuisorem diuidatur: figuræ vero ablatæ, si nihil peracta diuisione remaneat, fiaut numerator fractionis: denominator autem sit diuisor totus unà cum cifris. Et si in diuisione aliquid extra figuras ablatas remansit, erũt figuræ ablatæ, cum residuo illo pro numeratore fractionis ponendæ: ut si numerus 3367 diuidendus sit per 300, auferas 67 à 3367, & diuidas 33 per 3: quotus erit sic, $11\frac{67}{300}$ Quod si 3467 per 300 diuisa fuerint, quotus erit sic. $11\frac{167}{300}$.

Si diuisor & diuidendus à principio cifras habuerint: tunc abijciantur ab utroque cifræ pares, & diuidantur notæ reliquæ: ut si numerus 45600 sit diuidendus per 200, quatuor cifræ, binæ videlicet à singulis remoueri debent: & 456 per 2 diuidi: unde emerget pro quoto 228.

Si ultima nota diuisoris fuerit 1, & reliquæ fuerint cifræ, tunc simpliciter pro quoto accipiatur diuidendus, si prius tot ex diuidendi numeri dextra parte subducantur figuræ, quot habet diuisor cifras. Sublatæ autem notæ interiecta lineola superponantur diuisori: ut si diuidas 3685 per 1000, quotus erit $3\frac{685}{1000}$.

Quotus tot habet figuras, quoties diuisor sub numero diuidendo positus est.

Omnino

Omnino fieri non poteſt, ut quotus una vice plus quam nouies ſumi poſsit: quia maior numerus quàm nouem unica nota comprehendi non poteſt.

Si in media operatione aut fine diuiſor non continetur aliquoties in diuidendo, citra ponitur pro quoto.

Si figura quoti accepta ſit nimis parua, ſubtrahe diuiſorem ex numero relicto toties, quoties poteſt fieri: donec numerus diuiſore minor relinquatur, & tot unitates quoto adde, quoties facta eſt ſubtractio.

Si figura quoti accepta ſit nimis magna, reſtitue primum cancellatas figuras diuiſoris & diuidendi, iterata multiplicatione: & aliam figuram minorem unitate pro quoto accipe: eouſque dum relinquatur reſiduum diuiſore minus.

Vt in multiplicatione, ſic & in diuiſione quatuor ſunt numeri proportionales, nempe ut diuidendus ad diuiſorem: ſic quotus numerus ad unitatem ſeſe habet. E. G. ſi 12 diuidas per 4, ut quotus ſit 3, quia unitas in ternario continetur ter: etiam quaternarius diuiſor ter continetur in 12 diuidendo, & contrà.

Ordo diuiſionis duplex eſt, analyticus & ſyntheticus. Analyticus eſt vulgaris, isq; optimus, à ſiniſtra dextrorſum, ut in ſubtractione analytica. Antecedens enim nota non ſubducitur, quin ante ſi prouiſum, unde reliquæ poſsint ſubduci.

Syntheticus eſt à dextra ſiniſtrorſum, isque ſola ſubtractione perficitur: quæ diuiſio eſt prolixior: ut cupiens ſcire quoties 4 in 12 contineatur, ſic procedo. Primo ſubtraho 4 à 12 reſtant 8 Secundo 4 ab 8 reſtant 4. Tertio 4 à 4 reſtat 0 Dico igitur quotum eſſe 3. Tantus enim eſt quotus, quot ſunt factæ ſubtractiones.

Modus ſubtrahendi in diuiſione triplex eſt. Primus, ut quotus ducatur primum in omnes figuras diuiſoris: & hinc tandem productum totum ſubtrahatur à figuris diuidendi. Secundus, ut idem quotus primùm ducatur in primam figuram diuiſoris, moxq; productum ex numero ei figuræ ſupra poſito auferatur: deinde idem ducatur in ſecundam figuram diuiſoris: & ita deinceps in reliquas: donec ad ultimam peruentum ſit: productique numeri ex ſupra ſcriptis numeris ſenſim tollantur. Tertius, idem quotus primum ducatur in ultimam figuram diuiſoris, & hoc productum ex numero ſupra ultimã illam figurã poſito auferatur: deinde ducatur in ſiguram penultimam: productumq; ſimiliter ex numero ſupra poſito detrahatur, ut prius, & ſic in omnes, ſi quæ ſunt, figuras fiat multiplicatio.

Primus modus est certior, & facilior, & tyronibus accomodatior, quamuis prolixior. Nam ex ipsa operatione facile intelligitur, num figura accepta in quoto sit nimis magna nec ne. In altero modo, plerunque fit, ut non scribantur tot figuræ supra numerum diuidendum, ut in tertio. Contrà tertius apud mercatores, magisque exercitatos magis est in usu, faciliusque in eo error, si quis admissus sit, corrigi potest.

Praxin Italicam diuisionis vocant, quæ diuisorem in numeros, à quibus factus est, diuidit: & diuidendum primò per unum facientem: & quotum rursus per alterum diuidit: ut sit 48 diuidendum per 12: quoniam 12 est productum ex 3 & 4, diuide primum numerum propositum per 3, & fit quotus 16: & quotum hinc rursus per 4 & prodibit quotus 4, qui quærebatur. Quod si quotus sit fractus, diuisio hæc Italica maioris est laboris quàm vulgaris.

Prolixior est & illa operatio, & non nisi in magnis numeris, quales sunt in tabulis sinuum adhibenda, quæ diuisorem prius per singulas figuras significatiuas multiplicat, quemlibet productum numerum iuxta figuram multiplicantem scribendo: ut habeatur in promtu tum quotus ex digitis: tum productum quoti in digitum, numero supra diuisorem posito congruens: moxq; fiat specialis subtractio: vel potius positis omnibus productis, & in unam summam additis, fiat generalis subtractio à diuidendo. Sic, v. gr. si quis 56789 diuidere velit per 45, collocet diuisorem iuxta 1: eundem deinde duplicatum iuxta 2, triplicatum iuxta 3, & sic deinceps hoc modo.

1 — 45.	a		0
2 — 90.	b		2
3 — 135.			1 1 0 4 4
4 — 180.			5 6 7 8 9 (126 $\frac{44}{45}$.
5 — 225.		a	45
6 — 270.	c	b	90
7 — 315.		c	270
8 — 360.		d	45
9 — 405.			

Hic primum in tabula facta inquiro numerum 56 supra diuisorem positum, quem quoniam non inuenio, accipio 45 proximè minorem, & figuram 1 è regione eius collocatam pro quoto pono, & subtraho 45 à 56, restant 11: & sic deinceps procedo.

Probatio iustæ diuisionis potest fieri varijs modis, ut additione,

subtractione, multiplicatione, diuisione.

Additio fit colligendo in unam summam omnia producta singularum figurarum quoti in diuisorem ductarum: illisque residuum, si quod sit, addendo. Legitima enim fuit operatio, si summa sit æqualis diuidendo: ut in præcedenti exemplo.

4 5 . . .
9 0 . .
2 7 0 .
4 5
Residuum -- 4 4.
5 | 6 7 8 9.

SUBTRACTIO 9 vel 7. Nam si residua partium in se ductarum sunt æqualia residuo totius, quotus inuentus est verus numerus.

Multiplicatio est ductus quoti in diuisorem. Productum enim erit æquale diuidendo, si recta fuerit diuisio. Congruit igitur ferè cum probatione per additionem: nec multiplicatione opus est, cum producta singulorum quotorum per diuisorem in opere diuisionis deleta non sunt.

Et rursus omnis quotus unitate auctus, si per diuisorem multiplicetur, dat productum æquale summæ emergenti ex additione diuisoris & diuidendi. E. G. Sint duo numeri 24 & 8, ille diuidendus: hic diuisor. Hi additi faciunt 32. Quod si 8 diuidatur per 24, quotus erit 3, qui auctus unitate facit 4. Iam 4 in diuisorem, nempe 8 ductus facit 32, numerum antea ex additione inuentum.

Idem vero quotus unitate minutus per diuisorem multiplicatus dat productum æquale residuo ablati diuisoris à diuidendo. E. G. Si diuidatur 24 per 8, quotus erit 3. Hic minutus unitate relinquit 2. Iam bis 8 sunt 16. Tantum est etiam residuũ, si 8 subtrahatur à 24.

DIVISIO est permutatio quoti & diuisoris.

Nam si quotus collocetur loco diuisoris, & noua instituatur diuisio, diuisor fiet quotus, si legitima fuit operatio. Sin minus, illegitima: ut 4 in 12 habetur ter: quia 3 in 12 habetur quater.

Diuisionis opus plus difficultatis habet, quàm actus cæteri numerorum, quod in hac priores numerationis species omnes concurrant: & quòd mente & manu, bona opus est, ad cognoscendum, quoties ultima figura diuisoris in numero suprascripto sumi debeat. Difficultatem tollit conueniens ordo in hoc studio, ut ab ipso primordio facilioribus exemplis diuisionem instituas: & si quotum semper inueneris, qui in diuisorem ductus numerum diuidendo maiorem non efficiat.

Recentis

Recentiores alio diuisionis modo difficultatem eius tollere conantur, eoque tali.

1. Scribatur diuidendus in medio: quotus à dextris: diuisor à sinistris.

2. Facta collatione diuisoris & diuidendi distinguatur diuidendus asterisco adiecto, vel subtracta parallela linea, cui in multiplicatione primus subscribatur numerus: reliquis inde ordine sequentibus, qui omnes absoluta multiplicatione quoti cum diuisore à suprascripto numero subducendi sunt.

3. Residuo si quod fuerit, sequens addatur diuidendi figura, prius tamen asterisco vel parallela linea notanda, ne forte repetatur, vel illa omissa pro accepta reputetur.

4. Denuo facta quæstione de quoti figura, adscribenda reliquis, multiplicetur ea in totum diuisorem: & perfecta multiplicatione, subscriptione & subductione, canon hic sæpius, pro ut necesse est, repetitus, finem operationi imponet. E. G. Sit diuidendus hic numerus 7083195 per 345. Modus diuisionis est hic.

Diuisor.		Diuidendus.	Quotus.
345		7083195	20531
	Prod.	690	EXAMEN
	Resid.	01831	345
		1725	1035
	Residuum	1069	1725
	Prod.	1035	6900
	Residuum	345	7083195
	Productum	345	
		000	

Primum sic dico, 3 in 7 habeo 2. quæ sub quoto scribo: mox 2 in 345 duco fiunt 690: scribenda sub figuris diuidendi: quæ subtracta à 708 relinquunt 18, scribenda non supra diuidendum, ut vulgo fieri solet, sed infra producti substratam lineam, ut vides. Iam 18 addo sequentem diuidendi figuram 3, & priori residuo adscribo, præcisè sub ternario: sub quo & asteriscum pono, vel parallelam lineam tractam à ternario ad ternarium.

Deinde sic dico, 3 in 1, habeo 0, quam quoti primæ figuræ adscribo. 0 autem nihil multiplicat nec subtrahit. Progredior igitur in diuisione & 1 adscribo 183, ut fit 1831, subscripto asterisco vel tracta linea parallela.

Rursus sic dico 3 in 18, habeo 5, quæ quoti secundæ figuræ adscri-

bo: eaq; in 345 multiplico, & fiunt 1725, sub prioribus figuris tanquam diuidendis scribenda, & mox subtrahenda: remanebunt autem 106, quibus 9 adijcio ex numero diuidendo, subtracta parallela, & fiunt 1069.

Quarto sic dico, 3 in 10 habeo 3, quæ quoti tertiæ figuræ adscribo: eaque in 345 multiplico, & fiunt 1035, scribenda infra prius productum, & subtrahenda ab eodem: remanebunt autem 34, quibus 5 adijcio ex numero diuidẽdo, subtracta parallela, & fiunt 345.

Quinto sic dico: 3 in 3 unum, quod quartæ figuræ quoti adscribo: mox 1 in 345 duco, fiunt 345, quæ subtracta à 345 relinquũt 0.

Examen fit additione productorum ex multiplicatione, ut supra apparet in dato exemplo. Nam ex additione terminorum sparsim productorum numerum initio ad diuidendum propositum constitui necesse est. Et quotus tot figuris constat, quot asteriscis vel parallelis diuidendus plus unitate. Præterea in examine numeros denario, centenario, millenario & ita deinceps ordine & loco dispositos rite singulos singulis locis collocari oportet. In supputatione vero punctum siue parallela linea sequenti numero adijcienda, si prima diuisoris primam diuidendi excedat, ut in secundo exemplo. Neque hoc locum habet in secunda quæstione, vel etiam qualicunque alia, ut in priore vel secundo exemplo videre licet. Et tot figuræ scribendæ loco residui, quot sunt figuræ diuisoris, adiecta una quæ ex diuidendo proxima sumitur.

SECVNDVM EXEMPLVM.

Diuisor		Diuidendus	Quotus
789		315689946	400114
	Prod.	3156 |||||	Examen.
	Resid.	10000899 ||	3156
	Prod.	789 ||	789
	Resid.	1104 |	789
	Prod.	789 |	315600
	Resid.	03156	315689946
	Prod.	3156	
		0000	

TERTI-

TERTIVM EXEMPLVM.

Diuisor	Diuidendus.	Quotus
921.	2346678	2547. ... $\frac{891}{921}$.
	1842 | | |	Examen.
	5046 | |	891
	4605 | |	6447
	4417 |	3684
	3684 |	4605
	7338	1842
	6447	2346678
	891	

In diuisione diuersarum specierum, idem modus adhibendus, qui supra in multiplicatione. V. G. Sint diuidendi inter tres 43 fl. 14. cr. 4 num. Facta diuisione proueniunt 14 fl. 24 cr. 2. num. & ferè unus nummulus, qui uni ex tribus debentur.

ALIÆ DIVISIONES PARTIVM DIVISIONIS.

Diuidendus aut est par, aut impar: & iterum aut primus, aut compositus: & rursus alius perfectus, alius abundans, alius diminutus: & deniq; alius minimus, alius non minimus: quem & diuiduum uocant.

Similiter diuisor aut est pars, aut partes: & alius maximus, alius non maximus.

Par numerus est, qui per duo diuidi potest: Græcè ἄρτιος*: estq; triplex: pariter par, impariter par, & pariter par & impar.*

Impar, qui non potest in duas æquales partes diuidi: seu qui unitate superat parem numerum; Græcè περιττός*: Germ.* vntheilbar*, estq; duplex, pariter impar, & impariter impar.*

Pariter par est numerus pari numero per parem diuiduus: ut 32, quem metitur par numerus 8 per numerum parem 4. Græcè ἀρτιάκις ἄρτιος*.*

Impariter par est ab impari numero per parem diuiduus, ut 24, quem metiuntur 3 & 8. Græcè περισσάκις ἄρτιος*.*

Pariter par & impar est à numero tum pari tum impari per parem diuiduus, ut 12, 20, 24, 28, 56, 144. Nam, uerbi gratia, 12 diuidit 2 par per 6 parem: & 3 impar per 4 parem. Tales sunt omnes pares, qui neq; à binario

duplicati sunt, neq; dimidium impar habent: 34 p. 9.

Pariter impar est à pari numero per imparem tantum diuiduus, ut 18, quem metiuntur 6 & 3. Differt igitur ab impariter pari, quod hunc non tantum impar, sed & par per parem metitur. Nam 24 metiuntur etiam 4 & 6. Euclidi ἀρτιάκις περισσός.

Impariter impar est numerus, quem impar numerus secundum imparem metitur: ut 21 metiuntur 3 & 7.

Primus numerus est, quem sola unitas metitur; Græcis πρῶτος, & ἀσύνθετος. Latinis incompositus: ut 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Sunt autem primi numeri duplices: alij singuli, alij primi inter se. Singuli non nisi impares sunt: excepto uno pari incomposito, id est, binario, qui in usu imparium incompositorum semper se illis adiungit. Et hi etiam primi per se dicuntur.

Primi numeri inter se sunt, quorum communis mensura est sola unitas, ut 15 & 16 sunt inter se primi; Græcis πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, & ἀσύμμετροι.

Compositus numerus est, quem alius quidam numerus metitur: Græcis σύνθετος, Estq; duplex, alius per se & solus consideratus, ut 4, 6, 8, 9, 10, 12. Horum enim singulorum mensura est aliquis numerus, ut 4 metitur 2: senarius 3, & sic de cæteris. Alius respectiuè, & cũ alio consideratus, qui unũ tantũ habet numerum per se compositum: alterum uero per se primum, ut 5 & 10. Quinq; enim est per se primus, 10 autem per sese est compositus: & 5 utrunq; metitur. Hi & compositi inter se dicuntur: quorum communis mensura est quidam numerus: Græci πρὸς ἀλλήλους συνθέτους, & σύμμετρους uocant: Latini etiam communicantes.

Perfectus est par, cuius partes omnes coniunctæ summam totius præcisè constituunt: ut intra decem senarius, intra centum 28. Nam partes omnes senarij sunt 1, 2, 3: quæ additæ sex faciunt. Sic partes 28 sunt 1, 2, 4, 7, 14. Tales sunt etiam 496, & 8128.

Abundans uel superfluus est par, cuius partes inuicem additæ summam totius excedunt: ut 12, qui numeratur à 6, 4, 3, 2, 1 quorũ aggregatum facit 16.

Diminutus est par, cuius partes si addantur, minus toto constituunt: ut 10, qui numeratur à 5, 2, 1: qui iuncti tantum 8 constituunt.

Diuiduus minimus est, quo minorem duo pluresue exactè diuidere non possunt. Euclidi ἐλάχιστος ὑπὸ τινῶν μετρούμενος. Est autem uterq; & diuisor & diuiduus communis numeris propositis. Pars

Pars est diuisor, seu numerus minor quidem maioris, sed maiorem dimetiens, sic dicta, quod aliquoties repetita totum constituit: ut 2 est pars octonarij, numeri maioris, quia illum metitur. Est autem quarta pars. Hanc & partem aliquotam uocant. Græci μέρ@. Campanus multiplicatiuam.

Partes sunt, cum minor quantitas, siue numerus siue magnitudo maiorem non dimetitur: ut tria sunt partes quinarij, quia 3 diuisa per 5 faciunt 1 ⅔, & hinc fractiones ortæ sunt. Sunt autem 3 tres partes quintæ numeri quinarij. Continent enim unitates, quarum quælibet est quinta pars quinarij. Hanc & partem aliquantam uocant: Græci μέρη. Campanus aggregatiuā. Hinc Arithmetici diuisionem aliam faciunt partis, aliam partium. Partis est, in qua diuisor est pars aliquota: ut si diuidas 12 per 3 uel 4. Partium est, ubi diuisor est pars aliquanta, ut si diuidas 12 per 5.

Parti opponitur multiplex, numerus scilicet maior minoris, quando ab eodem minore mensuratur: ut 6 est multiplex binarij & ternarij. Vterq; enim senarium metitur. Diuerso igitur modo numerus numeri, tum pars tum multiplex esse dicetur.

DIVISOR *maximus est in numeris compositis, quo maior dari non potest, & per quem numeri compositi diuisi fractionem reddunt minimam. Græcis* μέτρον μέγιστον.

σχόλιον.

1. Paris proprium est, quod per similia diuiditur. Nam, verbi gratia, si diuidis 8, utraque portio erit par aut impar, id est, vel duo & 6: vel 5 & 3: vel 4 & 4: vel 7 & 1.

2. Imparis proprium est, ut per dissimilia diuidatur. Nam, verbi gratia, si diuidis 9, unam partem habebis parem, aliam imparem.

3. Si impar addatur impari, productum erit numerus par: ut 5 & 5 sunt 10. Additus vero par impari facit imparem, ut 2 addito 3 faciunt 5.

4. Numeri primi vel in se ducti, vel in alios primos, non reddunt numerum ex alijs præterquam componentibus compositum: ut 5 in se facit 25, qui ab alio numerari non potest, præterquam à quinq;.

5. Perfectus alternatim iam in senarium, iam in octonarium desinit. Vnicus verò perfectus reperitur in quolibet decuplo augmento. In monadicis solus est 6: in decadicis 28: in hecatondaticis 496: in chiliadibus 8128. Et quintus 33550336. Sunt igitur perfecti numeri admodum pauci.

6. Perfecti inuentio est hæc. Pariter pares à quaternario binos combi-

combinato: & à maiore inter duos combinatos subtrahito unitatem: tandem residuum multiplica per minorem: productum est numerus perfectus, ut

Pariter pares.	4. 8	16. 32	64. 128	256. 512	1024. 2048.
Numeri perfecti.	28	496	8128	130816	2096128.

Hic 4 in 7 (qui minor est octonario unitate) ducta faciunt 28: 16 in 31 faciunt 496, & sic de cæteris.

7. Superflui inuentio est hæc. Superfluus commodissimè per sex mensuratur. Omnes enim huius numeri partes (quæ & ipsæ numerorum censentur nomine) abundantes sunt, ut 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 56, 63, & sic deinceps.

8. Diminuti inuentio est hæc. Omnis pariter par: omnis item numerus primus est diminutus, sed non solus, ut.

2.	4.	8.	16.	Pariter pares, diminuti.
1.	3.	7.	15.	Partes.

3	5	7	Primi, diminuti,
1	1	1.	partes.

Sunt & alij, præter pariter pares & primos, quorum partes diminutos constituunt, ut.

10	15	Diminuti præter pariter pares & primos
8	9	partes.

9. Explorationis, an dati numeri inter se sint primi, vel compositi, duplex est modus: unus subtractio: alter diuisio.

Subtractio est, ut datis binis numeris inæqualibus, si minore à maiore, quoties fieri potest, subducto, reliquus antecedentem non diuidat, quin in unitatem soluatur, dati inter se primi erunt. Quod si post assiduam subtractionem ad unitatem non perueniatur, sed numerus aliquis occurrat, antecedentem totum absumens, numeri inter se compositi erunt: ut datis 14 & 6, facta continua subtractione tandem numerus ultimus antecedentem totum absumit sic. 6 à 14, restant 8: 6 ab 8, 2. 2 à 6 3. Dati igitur 14 & 6 sunt inter se cōpositi.

Diuisio est, ut maiorem minore diuidas: sic ut quoti nullam rationem habeas, sed diuisorem tantum cum residuo conferas. Vltimus enim diuisor si fuerit unitas, numeri sunt inter se primi: sin alius numerus, numeri inter se erunt compositi: ut dati 200 & 17 inter se primi sunt. Nam 17 per 200 diuisis restant 13: rursus 13 per 17, restant

restant 4: denique 13 per 4, restat unum, diuisor ultimus. Contra 144 & 27 sunt numeri inter se compositi. Nam 144 per 27 diuisis, restant 9: rursus 27 per 9, restat nihil. Nouem igitur ultimus diuisor, qui non est unitas.

10. Numeri inter se primi nullum communem diuisorem habent: compositi autem plures habere possunt: è quibus maximum inuenire non cuiusuis est.

Datorum autem vel sunt bini tantum, vel terni, pluresúe. Si bini, inuenitur ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, hoc est, si alterum ab altero subtrahas, donec pares ambo reddantur: ut Theon ait prop. 2. lib. 7. Eucl. vel quod multo breuius est, continua diuisione minoris per maiorem, donec nullum sit residuum. Vltimus enim diuisor siue ultimum residuum est κοινὸν μέτρον μέγιστον, 2 pr. 7. Vt duorum numerorum 21, & 35 maximus communis diuisor est 7, quod metitur utrunque, & 21 & 35. Diuido enim 35 per 21, restat 14: hoc rursus diuido per 21 restat 7. Hoc residuum iterum diuido per 14, & restat nihil.

Si tres dati fuerint, si duorum antecedentium maximus communis diuisor cum tertio comparatus, eundem quoque diuiserit: idem primò inuentus, omnium erit maximus communis diuisor, atque ita deinceps in pluribus, 3 p. 7. ut 10, 15, 20, 25, compositorum inter se, 5 maximus communis diuisor est, quia tum antecedentes 10, & 15, tum consequentes 20 & 25 metitur.

Si verò antecedentium duorum maximus communis diuisor sequentes non diuidit, tum inuento diuisore cum tertio comparato, comparatorum maximus communis diuisor datorum omnium maximus communis diuisor erit, atque ita deinceps in pluribus, 3 p. 7. ut sint dati compositi numeri 18, 12, 9. Iam inter 18 & 12 maximus communis diuisor est 6, qui cum 9, qui tertius est numerus, non diuidat, cum eodem 6 seorsim comparetur: tumque quoniam inter 6 & 9 maximus communis diuisor est 3, idem omnium datorum maximus communis diuisor erit.

11. Quemcunque diuiduum, quem dati numeri metiantur, inuenire difficile non est. Inuentio enim fit solo ductu datorum numerorum inter se: ut 120 est diuiduus ab istis quatuor 2, 3, 4, 5. Duco enim 2 in 3, fit 6: & iterum 6 in 4, fit 24: postea 24 in 5, fit 120. Minimum vero inuenire, hoc opus, hic labor est.

Datorum autem vel sunt bini, vel plures.

Si duo inter se primi dentur, ducatur alter in alterum: factus erit is, quem metitur uterque datorum, & quidem minimus 36. p. 7: ut sint dati 2 & 3 numeri ad se inuicem primi, duc 2 in 3, prouenit 6 numerus quæsitus.

I Si dati

Si dati duo numeri sunt inter se compositi, inueniatur utriusque communis diuisor maximus, per quem si alteruter diuidatur, & quotus inuentus alterum multiplicet: factus erit minimus ab utroque diuiduus, 36 p. 7. ut datos 16 & 12 inter se compositos per 4 communem maximum diuisorem diuido: quoti erunt 4 & 3. Siue iam 16 per 3: siue 12 per 4 alternè scilicet multiplices, factus 48 erit minimus, quem uterque datorum 16 & 12 metitur.

Si dati tres, pluresúe fuerint, sumatur per præcedentes regulas, diuiduus, quem duo ex datis metiuntur. Nam si eundem & tertius metitur, confectum est negocium. Si vero tertius numerus inuentum non metitur, sumatur per præcedentes regulas numerus, quem & tertius numerus, & paulo ante inuentus metiuntur. Hic enim erit is, quem dati tres numeri metiuntur: & quidem minimus: atque ita deinceps in pluribus, 38 p. 7. Vt sint tres numeri 16, 12, 24. Cùm duo ex datis 16 & 12 metiantur 48, & eundem etiam metiantur 24, hinc sequitur, ut 48 sit trium datorum diuiduus minimus. Sint verò alij tres numeri 6, 14, 28: sitque inueniendus numerus minimus, quem omnes dati metiantur. Primò inuenio numerum minimum, quem duo ex datis, nempe 6 & 4 metiuntur, qui est 42: quem si & numerus 28 metiretur, satisfactum esset quæstioni. Sed quia non metitur, ideo eandem operationem repetens, quæro numerum, quẽ metitur nunc inuentus numerus 42, & datorum tertius 28. Talem autem reperio esse 84, qui idem est minimus, quem dati tres 6, 14, 28 metiuntur. Sic minimus diuiduus istorum quatuor 2, 3, 4, 5 est 60. Nam primum duorum datorum 2 & 3 minimus diuiduus est sex, per primam regulam: deinde 6 & 4 minimus diuiduus est 12 per alteram regulam: denique 12 & 5 minimus diuiduus est 60, iterum per primam regulam. Fundamentum operationis est identitas rationum. Quæ enim est ratio duorum datorum numerorum: eadem est minimorum illius terminorum: & rursus datis quatuor numeris proportionalibus, productum extremorum est æquale producto intermediorum.

12. Numerus, qui multos factores habet, habet etiam multos diuisores. Vt autem datis pluribus diuisoribus inueniri potest, ex præcedenti præcepto, communis diuidendus, isq; tum in genere tum in specie: sic dato aliquo diuidendo, omnes illius diuisores, indagari possunt hoc modo. Diuide primo diuiduum per seipsum: deinde per numeros primos singulos, quoties potes, incipiendo à binario, & per illum quoties potes: tum diuiduum, tum quotum diuide: ubi vero amplius non potes, progredere ad ternarium, & per illum

tum

tum ipſum diuiduum, tum quotum prioris diuiſionis diuide, & quidem toties, quoties potes: ubi vero amplius non potes, progredere ad quinarium: hinc ad ſeptenarium ſimiliter: tantiſper diuidendo, donec numerum primum in quoto inuenias, quem diuidere nullo numero poteris: deinde ad numeros compoſitos accede: & hos ſurſum verſus omnes diuide: ut ſit 60 numerus, cuius factores & diuiſores inuenire cupio. Proceſſus eſt hic.

60—in 60—1.
2—in 60—30.
2—in 30—15.
3—in 60—20.
5—in 60—12.
5—in 20—4.
5—in 15—3.
5—in 30—6.
3—in 15—5.
3—in 30—10.
2—in 4—2.

Sexagenarij igitur partes aliquotæ ſunt 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, id eſt, diuiſores ſunt 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Sic partes aliquotæ omnes huius numeri 496, ſunt hæ.

496—in 496— 1.
2—in 496—248.
2—in 248—124.
2—in 124— 62.
2—in 62— 31.
31—in 496— 16.
31—in 248— 8.
31—in 124— 4.
31—in 62— 2.

Quæ addita conſtituunt 496: unde hunc eſſe numerum perfectum cognoſcitur.

ARITHMETICAE PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ

LIBER SECVNDVS.

DE NVMERO FRACTO.

DEFINITIONES.

1. Numerus fractus est pars una, vel aliquot partes integri unius in aliquot partes æquales diuisi: ut si *lineam ab* diuidas in tres partes æquales a|———c|———d|———|b *a c, c d, d b*, *a c* erit una tertia pars, *a d* duæ tertiæ: *a b* tres tertiæ: quæ omnia numeri fracti dicentur.

2. Numerus fractus duplex est: simplex & mixtus. Simplex, ut $\frac{1}{2}$. Mixtus, ut $2\frac{1}{2}$. Hic & cōpositus dicitur: & in rebus Geometricis pro numero non habetur: sed cum mensura in misto tantum numero exprimi potest, ideoq; ἄρρητος, id est, numero inexplicabilis, Arithmeticis surdus dictus.

3. Rursus simplex alius primarius, alius secundarius. Primarius est pars vel partes integri, ut $\frac{1}{2}$ est una pars integri in duo diuisi: $\frac{2}{5}$ sunt duæ partes unius integri in quinque diuisi. Illum monadicum: hos numeratos vocant.

4. Secundarius est pars vel partes partium. Pars, ut $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$. Partes, ut $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$. Vt enim integra in minutias franguntur: ita rursus minutiæ in alias minutias subdiuiduntur. Appellatur & fractio fractionis, & minutiæ minutiarum, & partium particulæ.

5. Duæ sunt partes numeri fracti primarij: numerator & denominator, linea transuersa à se inuicem distincti: cum naturæ inter se diuersæ sint: & unum tamen esse numerum indicent.

6. Numerator est numerus superior, sic dictus, quòd tot partes

partes unius integri numerat, quot minutia in se continet. Appellatur & numerus simpliciter. Germanis der zehler.

7. Denominator est numerus inferior, sic dictus quod partes tot nominet, in quot totum siue integrum diuisum sit. Germ. der nenner. Appellatur & nomen & nominator & diuisor, quòd integri diuisionem ostendat: ut cum proponitur fractio continens $\frac{1}{2}$, numerator est 1: denominator 2. Integrum enim in duas partes diuidit: sic integrum est linea a b *a* |——c|——| *b* partes illius sunt duæ *ac*, *cb*. $\frac{1}{2}$ est particula *ac*: *vel cb*.

8 Numerus fractus secundarius pluribus constat fractionibus: ideoq; & pluribus numeratoribus ac denominatoribus notatur: inter quas minima primo loco versus sinistram interiectam habet lineam: principalior, quæ subdiuisa est postremo loco versus dextram collocatur: nulla tamen virgula interposita, discriminis causa: ut cum dicitur dimidium dimidij: unum dimidium rursus in duas partes diuiditur: & una illius dimidij in duas partes diuisi pars denotatur: ut dimidium dimidij lineæ a b est *ad*, vel *ce*. Tota enim linea a b primùm in duas partes a c & c b diuiditur: deinde singulæ partes iterum in duas a d & d c: & rursus c e, & c b. a |——d|——c|——e|——| b.

9 Et fractiones aliæ sunt synonymæ, aliæ heteronymæ. Synonymæ sunt eiusdem nominis, ut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Heteronymæ sunt diuersi nominis, ut $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Rursus aliæ simplices, ut $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ & sic deinceps. Non simplices, ut $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ & sic deinceps Appellantur vero & simplices, quibus nulla integra annexa sunt. Mixtæ contra, ut $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{4}{5}$.

10. Partiū fracti superior quidem prius nomine cardinali: deinde inferior nomine ordinali profertur: ac fracti primarij omnes recto casu: secundarij pars lineam trans-

versam habens recto casu: reliquæ vero obliquo (prout dicendi usus postulat) enunciantur, sic, $\frac{2}{3}$ duæ tertiæ: $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$, duæ tertiæ unius quartæ, Germ. zwey drittel eines viertels: $\frac{5}{6}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$. quinque sextæ duarum tertiarum unius quartæ, Germ. fünff sechßtel zweyer drittel von einem viertel. Proferuntur vero fœminino genere, quia nomen partium subintelligitur. Notantur vero & aliter, interiecta præpositione: & tum aliam prolationem habent, ut $\frac{2}{3}$ ex $\frac{1}{4}$. duæ tertiæ ex una quarta.

11. Sunt vero fractorum secundariorum alij terminorum quatuor: alij sex, alij plurium. Quatuor ut $\frac{3}{4}$ ex $\frac{1}{6}$. Sex, ut $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}$. Plurium, ut $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$. duæ tertiæ trium quartarum ex una sexta parte unius dimidij alicuius integri.

12. Ex qua diuisione apparet numerum fractum etiam sic definiri posse. Numerus fractus est, qui habet virgulam transuersam per medium sui ductam. Vel. Numerus fractus est quantitas numerata & denominata.

13. Rursus fractionum alia est vulgaris, alia physica. Vulgaris est, in qua numerus numerans ponitur supra: & denominans subtus. Physica est, in qua numerus denominans non scribitur: eò quod constat eum à 60 denominari: unde in scriptione eius, locorum distinctione opus est: ut scilicet primus locus sit integrorum, secundus minutorum, tertius secundorum, & sic deinceps. Hæc & Astronomica & philosophica dicitur.

14. Rursus minutia alia est abstracta, alia contracta. Abstracta est fractio unitatis, ut $\frac{2}{3}$ Contracta est fractio numeri numerati, ut $\frac{2}{3}$ floreni. Differre autem has minutias inter se ex eo apparet, quod v. g. $\frac{2}{3}$ ductæ in $\frac{3}{4}$ faciant unum dimidium: sed $\frac{2}{3}$ floreni, id est, 40 cr. ducti in $\frac{3}{4}$ floreni, id est, 45 cruciferos, non dimidium florenum, sed 30 fl. faciunt.

15. Oritur autem fractio, vel ex residuo diuisionis, ut si

diui-

diuidam 12 per 7, restat fractio $\frac{5}{7}$: vel quando numerus diuidendus est minor suo diuisore: ut si dicam 7 per 12, ex diuisione fractus fit ita $\frac{7}{12}$. Vnitas enim quæ frangitur, ut congregatione sui quamtumlibet crescit in numeros: ita & sectione quantumuis decrescit in suas ipsius particulas. Rursus non solum res integra in quotuis partes æquales diuiditur: unde fractio primaria oritur: sed etiam interdum ipse numerus fractus in plures æquales partes distribuitur: ac si essent integræ res: unde fractio secundaria procreatur.

16. Numerus fractus crescit aucto numeratore, & retento denominatore, ut $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$. Idem decrescit, aucto denominatore, & retento numeratore, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$.

SENTENTIÆ COMMVNES.

1. Vna quælibet pars est minor suo toto, vel integro.
2. Omnes partes simul sumtæ sunt æquales suo integro.
3. Partes non omnes sunt minores suo integro.
4. Partes plures, quàm habet integrum, sunt maiores integro.
5. Si numerus multiplicauerit duos numeros: procreati inde eandem cum multiplicatis rationem habebunt: ut eadem est ratio 24 ad 27, quæ 8 ad 9, quia sunt numeri facti ex ternario in 8 & 9 ducto, 17 prop. septimi.
6. Quoties numerus quicunque duos numeros quoscunque diuidit, quotorum eadem est proportio, quæ diuisorũ: ut 3 diuidens 21 & 24 producit 7 & 8. Ergo eadem est proportio 7 ad 8, quæ 21 ad 24. Eadem igitur proportio inter terminos, siue multiplices, siue diuidas utrunque terminum per unum aliquem numerum.
7. Omnes numeri fracti, quorum eadem est proportio: sunt

ſunt interſe æquales & æquipollentes: ut idem valor eſt $\frac{7}{8}$ qui $\frac{21}{24}$.

8. Omnis minutia ad unitatem eſt, ſicut numerator eius ad denominatorem, ut $\frac{1}{2}$ ad unitatem, ſicut 1 ad 2: & contrà, ut 1 ad 2, ſic $\frac{1}{2}$ ad integrum.

9. Si fuerint duæ minutiæ eiuſdem denominationis, eadem erit proportio minutiarum, quæ numeratorum: ut $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ ſunt duæ minutiæ eiuſdem denominationis. Ergo ut ſe habent $\frac{2}{5}$ ad $\frac{3}{5}$: ita 2 ad 3.

10. Si fuerint duæ minutiæ eundem habentes numeratorem, erit proportio prioris ad poſteriorem, ſicut proportio poſterioris denominatoris ad priorem denominatorem: ut proportio $\frac{2}{3}$ ad $\frac{2}{5}$ ita ſe habet, ut 5 ad 3, nimirũ ἀντιπεπονθότως, ut loquitur Barlaam. Habent enim eundem numeratorem.

11. Quarum fractionum eadem eſt ratio, quæ numeratorum, earum eadem eſt additio & ſubtractio, & diuiſio, quæ integrorum: ut fractionum duarum $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ eadem eſt ratio, quæ numeratorum. Ergo & eadem additio, ſiue ſumma quę integrorum, nempe $\frac{5}{5}$. Nam 3 & 2 faciunt 5. Et rurſus eadem ſubtractio ſiue reſiduum, ut $\frac{1}{5}$. Nam 2 ſubtracta à tribus relinquunt 1. Sic $\frac{6}{8}$ diuiſæ per $\frac{3}{8}$ faciunt duo integra. Nam 3 in 6 habetur bis. Intelligitur autem hæc communis ſententia de fractionibus eiuſdem denominationis.

VALOR FRACTIONIS.

πρότασις. Valorem fractionis datæ cognoſcere. Sunt autem tres caſus. Aut enim numerator eſt æqualis denominatori: aut minor, aut maior. Si æqualis, fractio integrum deſignat: ſi minor, minus integro: ſi maior, plus integro.

ἔκθεσις primi caſus. *Sit fractio* $\frac{4}{4}$, *cuius numerator eſt æqualis denominatori.*

Δ. Opor-

Δ. Oporet *huius fractionis valorem cognoscere.*

Κατασκευή. *Diuidatur numerator per denominatorem, & quotus erit unitas.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $\frac{4}{4}$ *integrum unum designare.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. definitio. *Denominator omnes partes integri ostendit. Numerator tot exhibet, quot sunt sumendæ.*

Hic numerator est 4 : & denominator etiam 4. Ergo tot partes integri sunt sumendæ, in quot integrum diuiditur.

2 Syll. 2. sententia. *Omnes partes simul sumtæ sunt æquales suo integro : vel, partes integri tot sumtæ, ex quot constat, sunt æquales integro.*

In fractione, cuius numerator est æqualis denominatori, tot partes integri sumuntur, ex quot constat. Ergo fractio, cuius numerator est æqualis denominatori, est æqualis integro. Vel sic.

1 Syll. sententia. *Continentia est valor. Quotus est continentia. Ergo quotus est valor.*

2 Syll. sententia. *Quotus est valor fractionis. Vnitas est quotus. Ergo unitas siue unum integrum est valor fractionis huius, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ἐκθ. Secundi casus. *Sit fractio* $\frac{n.}{d.}$ $\frac{3}{4}$, *cuius numerator est minor denominatore.*

Δ. *Dico* $\frac{3}{4}$ *minus integro designare.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. definitio. *Denominator omnes partes integri ostendit. Numerator tot exhibet, quot sunt sumendæ. Hic numerator est 3, & denominator 4. Ergo pauciores partes integri sunt sumendæ, quàm in quot integrum diuiditur.*

2 Syll. 3. sententia *Partes non omnes sunt minores suo integro In fractione, cuius numerator est minor denominatore, non omnes partes integri sumuntur. Ergo fractio, cuius numerator est*

minor denominatore, minus integro designat, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἐκθ. tertij casus. *Sit fractio* $\frac{4}{3}$ $\frac{n.}{d.}$ *cuius numerator est maior denominatore.*

Διορ. Oportet *huius fractionis valorem cognoscere.*

Κατασκ. *Diuidatur numerator per denominatorem, & quotus erit* $1\frac{1}{3}$.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $\frac{4}{3}$ *plus integro valere.*

Ἀπόδειξις.

4 sententia. *Partes plures quàm habet integrum, sunt maiores integro.*

In fractione, cuius numerator est maior denominatore, sunt partes plures, quàm habet integrum. Ergo fractio, cuius numerator est maior denominatore, valet plus integro, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

σχόλιον.

Numerus fractus est non tàm numeri quàm unitatis fractio. Etsi enim unitas numerans est ἀδιαίρετον, id est, diuisione careat: numerata tamen, seu physica seu ficta multas diuisiones admittit.

Sunt autem synonyma, numerus fractus, pars & partes (Euclidi particula) minutia, fractio, fragmentum, sectio, segmentum. Germ. gebrochne zahlen oder brüch.

Fractus numerus propriè non dicitur, cum sit infra unitatem, ideoque numerus non est. Sic fractio & minutia sunt voces Latinis ferè ignotæ: tritæ tamen, & quæ lege non valent, consuetudine valent.

Fractus dicitur, quod integrum frangit, secat, dispescit, subdiuidit in partes minores.

Minutia, quod minor sit, quàm integrum. Est enim vel una, vel aliquotæ partes unius integri.

Partes, quæ minus integro possunt, propriæ vocantur: quia omnis particula est minor monade. Impropriæ sunt, quæ vel æquales, vel maiores integro sunt. Et fractiones plus valentes integro extra numerationis opus nunquam scribūtur: eæque, vel sunt numeri non surdi, vel surdi. Non surdi, ut $\frac{4}{2}$. Surdi, ut $\frac{4}{3}$.

VALOR in specie est precium in partibus denominatis, ut taleris, uncijs, modijs.

Valor

Valor fractionis habentis numeratorem minorem denominatore inuenitur vel per regulam auream. Partes enim valorem suum non aliunde habent, quàm ex ratione superioris ad inferiorem: ut si velim scire $\frac{3}{4}$ floreni quot cruciferos faciant, terminos sic dispono. 4 d. 60, q. 3. Vel sic. 1 fl. facit 60 cr. quantum facient $\frac{3}{4}$ unius fl. Facta operatione prouenient 45 cr. Vel per hanc regulam. Ducatur numerator in partes rei denominatæ, ut monetæ, mensuræ, ponderis, productum diuidatur per denominatorem, & quotus erit valor: ut $\frac{3}{4}$ fl. faciunt 45 cr. hoc modo.

Multiplicatio. 60. cr. partes floreni rei denominatæ,
3. Numerator.

180. Productum.

Prod. 180 (45. cr. valor fractionis $\frac{3}{4}$.
Denomin. 44

Hinc dilucidior prolatio vulgarium fractionum, ut & Cossicarum, fit hoc modo. V. G. $\frac{3}{4}$ floreni, tres floreni diuisi per quatuor. Hæc enim prolatio fractionis valorem simul exprimit, iubens trium florenorum resolutorum in cruciferos fieri diuisionem per 4: quæ diuisio profert minutiæ valorem: & docet contineri in ea 45 cruciferos, ut antea.

Minutiarum minus integro valentium defectus inuenitur, si numeratorem à denominatore subtrahas: & residuum quod fuerit supra denominatorem scribas: ut in $\frac{3}{4}$ deest $\frac{1}{4}$. Nam ut se habet numerator ad denominatorem, sic se habet fractio ad integrum. 8 sententia.

Valor fractionis habentis numeratorem maiorem denominatore cognoscitur diuidendo maiorem per minorem: ut $\frac{7}{4}$ floreni faciunt unum fl. cum $\frac{3}{4}$: hoc modo. $\frac{7}{4}$ ($1\frac{3}{4}$. Quantum autem sint $\frac{3}{4}$, præcedens regula docuit.

Similiter valor fractionis habentis numeratorem æqualem denominatori diuidendo cognoscitur: ut $\frac{4}{4}$ unius anni sunt unus annus, hoc modo $\frac{4}{4}$ (1.

VALOR FRACTIONIS SECVNDARIÆ.

Πρότασις. Fractionis secundariæ valorem indagare.

Ἐκθ. *Sit fractio secundaria* $\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$.

Δ. Oportet *datæ fractionis secundariæ valorem cognoscere.*

Κατασκευή. *Ducatur primò numerator in numeratorem, ut 3 in 5, & fit 15. Secundò, ducatur denominator in denominatorē, ut 4 in 6, & fit 24. Tertiò prius productum scribatur supra: posterius infra, & fiat fractio.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico quod* $\frac{15}{24}$, *siue* $\frac{5}{8}$ *sit valor huius fractionis secundariæ,* $\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 5 axioma *Si numerus multiplicauerit duos numeros: procreati inde habebunt cum multiplicatis rationem eandem. Hic unus numerus, nempe 4, ductus in duos, nempe 5 & 6, procreat 20 & 24. Ergo ratio 20 ad 24, est eadem quæ 5 ad 6, nempe subsesquiquinta. Et rursus ut 5 sunt quinque sexta senarij: ita 20 sunt quinque sexta 24.*

2 Syll. Eadem prop. *Si numerus, &c. Hic unus numerus, nēpe 5, ductus in duos, nempe 3 & 4 procreat 15, & 20. Ergo est eadem ratio 15 ad 20, quæ 3 ad 4, nempe sesquitertia. Et rursus, ut 3 sunt tres quartæ quaternarij: ita 15 sunt tres quartæ 20.*

3 Syll. 1 sententia communis *1 El. Eucl. Quæ uni conueniunt, inter se conueniunt.*

15 sunt tres quartæ ipsorum 20: & eadem 20 sunt quinque sextæ ipsorum 24. Ergo etiam 15 sunt tres quartæ ipsorum 24, id est, quinque sextarum, hoc modo.

$\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$

15 --- 20 --- 20 --- 24

$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$

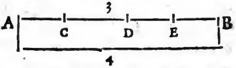
συμπέρασμα. *Fractionis igitur secundariæ nempe* $\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$ *valor inuentus est* $\frac{5}{8}$, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

σχόλιον.

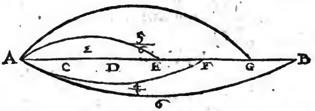
Valor fractionis secundariæ cognoscitur ex reductione illius ad primariam per multiplicationem numeratorum inter se: & denominatorum inter se: unde fit nouus numerator & denominator: ut $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{7}$ unius floreni sunt $\frac{8}{21}$. Si tres pluresúe fuerint fractiones productum proximum multiplica cum numeratore & denominatore fractionis tertiæ, quartæ, & sic deinceps: ut $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{6}$ sunt $\frac{40}{126}$ sic.

$\frac{8}{21}$ -- $\frac{5}{6}$ | $\frac{40}{126}$ | $\frac{20}{63}$.

VALOR FRACTIONVM IN LINEIS.

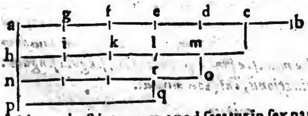


$\frac{3}{4}$ lineæ a b. est particula siue lineola A E. Tota enim linea constat 4 partibus.



$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ Lineæ A B est lineola A E, Semissis lineæ A B, ut apparet ex supputatione & dimensione oculari.

VEL IN SVPERFICIE, hoc modo.



Linea a b est integrum, quod secatur in sex partes æquales, quarũ quinque a c sunt $\frac{5}{6}$ quæ rursus diuiduntur in quinque partes, quarum quatuor h m siue h o sunt $\frac{4}{5}$: postremo n r, siue superficies n q iterum secatur in tres partes, quæ sunt tres quartæ, quatuor quintarum, de quinque sextis.

REDVCTIO FRACTIONVM.

πρότασις. Duas dissimilium denominationum minutias reducere ad alias æquales eiusdem denominationis.

ἐκθ. *Sint minutiæ dissimilium denominationum* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{4}{9}$.

Δ. Oportet *quærere alias fractiones eiusdem denominationis datis minutijs æquales.*

Κατασκευή. *Duc numeratorem unius in denominatorem alterius: unde fiunt duo noui numeratores: deinde denominatorem unius in denominatorem alterius: unde fit nouus, isq; communis, & ideo bis scribendus denominator, hoc modo: Quinq; ducta in 9 procreant 45: 4 ducta in 8 procreant 32: 8 ducta in 9 procreant 72, quæ sic scribo.*

$\frac{5}{8} \times \frac{4}{9}$. $\frac{45}{72}$. $\frac{32}{72}$.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico productas minutias esse æquales datis, ac primarum quidem quantitatem esse tantam, quanta est* $\frac{5}{8}$*: secundarum, quanta est* $\frac{4}{9}$.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 5 axioma. *Si numerus multiplicaueris duos numeros: procreati inde cum multiplicatis rationem eandem habebunt. Hic unus numerus 8 multiplicat duos 4 & 9, unde fiunt duo producta 32 & 72. Rursus 9 multiplicat similiter duos, 5 & 8: unde fiunt duo producta 45 & 72. Ergo productorum & multiplicatorum eadem est ratio, hoc modo:* $\frac{5}{8}$ *ad* $\frac{4}{9}$ *ita se habent, ut* $\frac{45}{72}$ *ad* $\frac{32}{72}$.

2 Syll. 7 sententia. *Omnes minutiæ eiusdem proportionis sunt æquipollentes. Duæ minutiæ* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{45}{72}$*: sic* $\frac{4}{9}$ *&* $\frac{32}{72}$ *sunt eiusdem proportionis. Ergo hæ minutiæ sunt æquipollentes, singula singulis: eaq; eiusdem denominationis,* ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

σχόλιον.

Reductio est numerorum habitudinis ad aliam formam, quæ sit operationi aptior, conuersio: valore seu partium quantitate non mutata: estq; triplex: una terminorum: altera integrorum, tertia fractionum. Ab hac triplici reductione tota fractionum supputatio pendet.

Reductio

Reductio terminorum, Græcis ἀνάλυσις, est eorum quæ sunt maioris denominationis ad minores proportionales resolutio: seu minutiarum maiorum ad minores conuersio. Sunt autem maiores, qui constant ex compositis inter se: minores seu minimi, qui ex primis inter se. Primi enim sunt minimi: & minimi sunt primi. 23 & 24 prop. sept. Græcis πυθμενικοὶ ὅροι. Fit autem hæc reductio per communem mensuram maximam, quæ utrunq; tàm numeratorem quàm denominatorem metiatur, cuius inuentio docetur scholio decimo. Quotus enim utriusque ex illa diuisione nouum numeratorem & denominatorem constituit: ut $\frac{112}{512}$ conuerti seu diminui potest per 16, communem mensuram maximam, eritque sic $\frac{7}{32}$. Sic $\frac{39}{65}$ per 13, faciunt $\frac{3}{5}$. Et sic de reliquis omnibus. Quod si numeri sunt inter se primi, nulla potest fieri diminutio.

Longior, sed imperfecta redigendarum minutiarum ad minimos terminos ratio hæc est. Tàm numerator quàm denominator per communem aliquam eorum mensuram notam, etiamsi maxima non sit, diuidatur: & rursus huius inuentæ minutiæ tàm numerator quàm denominator per aliam communem mensuram, & sic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator & denominator sint numeri inter se primi: ut hæc minutia $\frac{42}{56}$ primùm diminui potest communi mensura binarij, & prodeunt $\frac{21}{28}$: & rursus hac inuēta per 7 diuisa, prodeunt $\frac{3}{4}$, quæ constant numeris inter se primis. Regulæ, quæ addunt aliquid celeritatis in communi mensura inuenienda utriusque numeri, traditæ sunt libro primo de diuisione, unde peti possunt. Sunt enim quidam numeri, qui per binarium, ternarium, quaternarium & sic deinceps commode diuidi possunt. Quæ reductio magnam in supputando utilitatem adfert. Pauciores enim numeri pluribus sunt commodiores, in omni supputatione, præsertim fragmentorum.

Analysi numerorum contraria est synthesis, per quam minores minutiæ in maiores reducuntur, per multiplicationem: ut $\frac{1}{2}$ fit maior ductu siue 2 siue 3, siue alterius digiti in utrâq; partem fractionis: *sic.* $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{16}$ $\frac{16}{32}$. *uel sic,* $\frac{3}{6}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{12}{24}$ $\frac{24}{48}$, *& sic deinceps.*

Reductio integrorum est duplex, una ad fractiones simplices: altera ad fractiones datæ denominationis.

Integra si sola fuerint, franguntur simpliciter unitate supposita: ut $\frac{3}{1}$ idem sunt, quod 3. Si vero integra fractis adhæreant, multiplica integrum per fractionis denominatorem: producto numeratorem adde: & summa numeratorem nouum producet, cui priorem denomi-

denominatorem ſubſcribe: ut $6\frac{2}{5}$ facit $\frac{32}{5}$. Nam quinquies ſex ſunt 30, quibus addito numeratore nempe 2, fiunt 32: quibus denominator 5 ſubſcribitur.

Integra reducuntur ad fractiones datæ denominationis, ſi multiplicentur integra per denominatorem datæ fractionis. Productum enim erit numerator, cui denominatorem, in modum partium linea interpoſita, ſubſcribi oportet: ut 7 integra, reducta ad quartas faciunt $\frac{28}{4}$. Nam quater 7 ſunt 28: quibus 4 ſubijcitur. Sic ex ſolutione trium integrorum in quadrantes, fiunt $\frac{12}{4}$. Ex conuerſione 9 integrorum in trientes $\frac{27}{3}$. De ſimilibus idem cenſendum. Quod ſi integrum ſit unitas, fac numeratorem æqualem denominatori dato, ut unum redactum in octauas facit $\frac{8}{8}$.

Reductio fractionum duplex eſt: alia ſimplicium, alia mixtarum. Simplicium rurſus alia in numeros integros: alia ad aliam æquipollentem ſiue denominationem, ſiue numerationem. Mixtarum reductio eſt ad ſimplices.

Reductio fractionum in numeros integros eſt earum minutiarũ, quarum numerator denominatore maior eſt: quæ fit diuiſione numeratoris per denominatorem: quo pacto & valor illarum cognoſcitur: ut hæc minutia $\frac{50}{25}$ nihil aliud eſt quàm 2 integrá: quia 25 in 50 bis habetur. Quod ſi quid in diuiſione ſupererit: illud erit numerator: cui idem denominator ſubſcribendus eſt: ut hæc minutia $\frac{203}{5}$ cõtinet 40 integra: & inſuper tres quintas partes unius integri: quia in diuiſione numeratoris per denominatorem tria remanſerunt.

Reductio fractionum ad aliam denominationem duplex eſt: alia ad quamlibet, alia ad ſimilem ſiue eandem.

Reductio fractionum ad aliam denominationem quamlibet fit hoc modo. Duc denominatorem earum, ad quas vis reducere, in numeratorem reducendarum: productum diuide per denominatorem reducendarum: & prodibit numerator tui denominatoris: ut $\frac{2}{3}$ reductæ ad ſextas faciunt $\frac{4}{6}$: quia ductis 6 per 2 fiunt 12: quæ diuiſa per 3 faciunt 4: numeratorem ſextarum. Sic $\frac{12}{16}$ reductæ ad quartas faciunt $\frac{3}{4}$.

Quod ſi aliquod reſiduum fuerit, tum aut maiores partes in minores mutãtur: aut minores partes econuerſo in quaslibet maiores.

In reductione maiorum fractionum ad minores, reſiduum erit pars partis, ut $\frac{3}{5}$ reductæ ad ſeptimas faciunt $\frac{4}{7}$ & $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$, hoc eſt, quatuor

ſeptimas

septimas & unam quintam unius septimæ. Fractio enim denominationem habet in recto casu à maiorum partium denominatore, qui diuisor fuerit: posterior vero in casu obliquo à denominatore minorum.

Similiter fit in reductione minorum partium ad maiores: ut $\frac{7}{8}$ reductæ ad quinta faciunt $\frac{4}{5}$ cum $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{5}$. Pronuntiatio enim sic fit, ut fragmentum fragmenti habeat denominationem in casu recto à minoris fragmenti denominatore, per quem fit diuisor: alterum vero in obliquo à denominatore maioris. Porro minores partes sunt, quarum denominator est maior: maiores sunt, quarum denominator est minor.

Reductio fractionum ad æquipollentem denominationem eandem fit, ut supra dictum, multiplicando in se denominatores primum per secundum: productum, (si plures duabus fuerint minutiæ) per tertium, & sic deinceps: ultimum productum communis erit denominator bis scribendus: numerator vero cuiuslibet decussatim per denominatorem alterius multiplicatus producit geminum numeratorem, si propositæ minutiæ duæ fuerint. Sin plures: denominatorem communem per cuiuslibet minutiæ denominatorem diuide, & quotum per numeratorem multiplica, & producetur numerator, supra communem denominatorem scribendus: ut $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{4}{9}$ reductæ ad eandem denominationem faciunt $\frac{45}{72}$ *&* $\frac{32}{72}$. *Sic* $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{1}{4}$, reductæ ad eandem denominationem faciunt $\frac{108}{180}$ $\frac{80}{180}$ $\frac{45}{180}$.

Breuiarium reductionis ad eandem denominationem fit duplici modo. Primùm sic. Si denominatorum aliquis in altero continetur, quotum diuisione inuestiga: & per illum multiplica numeratorem minoris denominationis: productoq; maiorem denominatorem subscribe: ut $\frac{3}{4}$ *cum* $\frac{5}{12}$ ad idem nomen reductæ faciunt $\frac{9}{12}$ *&* $\frac{5}{12}$. Nam 4 in 12 ter continetur. Iam per eundem quotum multiplico 3, fiunt 9, quibus subscribo denominatorem maiorem, hoc modo $\frac{9}{12}$.

Secundò sic. Si denominatores alter alterum non numerant: sed ambo in tertio aliquo eoque minimo diuiduo continentur: vide quoties uterque in tertio illo contineatur, & per eosdem quotos suum utriusque numeratorem multiplica: tertio illo pro communi denominatore utrobique subscripto: ut $\frac{5}{6}$ cum $\frac{3}{8}$ ad idem nomen reductæ faciunt $\frac{20}{24}$ *&* $\frac{9}{24}$. Hic enim neuter denominator alterum numerat: sed ambo tertium quendam, videlicet 24: unus quidem

quatet: alter autem ter metiuntur: ideoque priorem numeratorem duco in 4, fiunt 20: deinde posteriorem in 3, fiunt 9: & tertium illum numerum pro communi denominatore suppono.

Reductionis huius multi sunt usus. Nam & magnum praestat compendium in supputatione, & utrum una fractio sit aequalis alteri: an maior aut minor ostendit. Aequalis est, quae vel iisdem terminis constat: vel ex terminis eiusdem rationis: id est, quorum numeratores ad denominatores eandem rationem obtinent. Omnes enim minutiae eiusdem proportionis sunt aequipollentes. Est vero & illa aequalis alteri, quae ad aequales terminos reduci potest: ut $\frac{1}{2}$ est aequalis $\frac{2}{4}$ Aequipollent enim per reductionem ad similes denominatores istis aequalibus $\frac{4}{8}$ $\frac{4}{8}$ Fractio una est maior altera, quae reducta ad similes denominatores, maiorem habet numeratorem: contra minor, quae minorem: ut $\frac{3}{4}$ plus sunt, quàm $\frac{2}{4}$. quia reductae ad aequales denominatores aequipollent istis duabus $\frac{12}{16}$ $\frac{8}{16}$ singulae, singulis. Iam vero 12 prioris numerator est maior: 8 posterioris minor. Contra $\frac{1}{5}$ est minus quàm $\frac{3}{7}$. Reductae enim ad aequales denominatores aequipollent istis duabus $\frac{7}{35}$. $\frac{15}{35}$: ex quibus illa minorem: haec maiorem numeratorem habet.

Reductio ad aequipollentem aliam numerationem fit hoc modo. Ducatur prioris fractionis tàm numerator quàm denominator in numeratorem posterioris fractionis, fiantq; producta, quae prioris numeratoris & denominatoris locum occupent: deinde posterioris fractionis tàm numerator quàm denominator ducatur per prioris fractionis numeratorem: fiantq; producta, quae posterioris numeratoris & denominatoris locum occupent. E. G. Sint duae fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$ Hae reductae eo, quo dictum est, modo ad numeros unius numeratoris faciunt $\frac{15}{20}$ & $\frac{15}{18}$. Nam 5 ducta in 3 & 4 faciunt 15 & 20: rursus 3 ducta in 5 & 6 faciunt 15, & 18.

Reductio mixtarum fractionum ad simplices fit eo modo, de quo supra dictum est. Ducatur numeri mixti pars integra in partis fractae denominatorem, productoq; addatur partis fractae numerator. Summa enim pro numeratore supra scripta denominatori fractionis mixtae, constituit fractionem aequalem numero mixto. E. G. Sit fractio mixta $4\frac{2}{3}$. Haec reducta, eo, quo praeceptū docet, modo facit $\frac{14}{3}$. Nam 4 ducta in 3 faciunt 12, quibus addita 2, constituunt 14 pro numeratore, cui subscribitur 3, denominator propositae fractionis.

Est & reductio monetarum, ponderum & mensurarum in minutias: &

tias: & rursus minutiarum in monetas, pondera & mensuras.

Reductio minutiarum in monetas, pondera & mensuras fit per regulam supra traditam in scholio de valore fractionum. V.G. $\frac{3}{5}$ de floreno, continent 36 cruciferos: de libra $7\frac{1}{5}$ uncias: de sextario totidem cyathos. Florenus enim 60 cr. libra 12 uncias: sextarius 12 cyathos continet.

Reductio monetarum, ponderum & mensurarum fit per hanc regulam. Datus numerus sit numerator: partes rei denominatæ, denominator: hoc posito utaris regulâ minutias ad minimos terminos reducendi. V.G. 36 cruciferi faciunt $\frac{36}{60}$ floreni, siue quod idem est $\frac{3}{5}$ fl. 7 unciæ faciunt $\frac{7}{12}$ libræ: 7 cyathi faciunt $\frac{7}{12}$ sextarij.

TABVLA REDVCTIONVM.

- Reductio triplex: alia
  - Terminorum, eaque vel:
    - Maiorum ad minores diuisione
      - Breuiore per communem mensuram maximam.
      - Longiore, per mensuram quamcunque.
    - Minorum ad maiores, multiplicatione.
  - Integrorum ad fractiones vel:
    - Simplices. Sunt autē integra vel,
      - Sola, quæ franguntur simpliciter unitate supposita.
      - Mixta cum fractis, quæ rediguntur ad simplices fractiones, multiplicatione integri per nomen: additione producti ad numerum pro nouo numero; & subscriptione eiusdem nominis pro nouo nomine.
    - Datæ denominationis, multiplicando integrum per nomen pro nouo numero, & subscriptione eiusdem nominis, pro nouo nomine.
  - Fractionum, eaque vel:
    - Simplicium ad
      - Numeros integros, ubi numerator denominatore maior est. Diuisione autem perficitur.
      - Aequipollentem siue
        - Denominationem; eamque vel
          - Quamlibet, ductu partium datarum in numerum; & diuisione producti per nomen.
          - Eandem, ductu alterno numeri per nomen, pro nouis numeris; & directo nominis in nomen, pro nouo nomine communi.
        - Numerationem, primum ductu tàm numeri quàm nominis prioris minutiæ in numerum posterioris: producta erunt prior fractio; deinde ductu tam numeri quàm nominis posterioris fractionis in numerum prioris: producta erunt posterior fractio.
    - Mixtarum ad simplices, quæ perficitur eo modo, quo integra mixta cum fractis ad fractiones simplices reduci solent, de quo supra.

ADDITIO

ADDITIO FRACT.

Πρότασις. Duas minutias addere.

Tres sunt casus. Minutia enim aut simplex simplici: aut mixta simplici vel mixtæ, aut simplex integro addēda est. Rursus aut eiusdē aut diuersæ denominationis. Et aut duæ aut plures addendæ sunt.

Ἐκθ. primi casus. *Sint datæ duæ simplices fractiones eiusdem denominationis,* $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$.

Δ. Oportet *datas minutias addere.*

Κατασκευή. *Adde 3 & 4 numeratores in unum numerum, qui sit 7, cui subscribe 8 communem denominatorem & euadet minutia* $\frac{7}{8}$.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $\frac{7}{8}$ *esse quæsitam minutiam.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 9 sententia. *Si fuerint duæ minutiæ eiusdem denominationis, eadem erit proportio minutiarum, quæ numeratorum.*

Ergo hæ duæ fractiones $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ *sunt ad se inuicem, ut 3 ad 4.*

2 Syll. 11 sententia. *Quarum fractionum eadem est ratio, quæ numeratorum: eadem est additio, quæ integrorum.*

Hic duarum fractionum $\frac{3}{8}$ *&* $\frac{4}{8}$ *eadem est ratio quæ 3 ad 4.*

Ergo, ut 3 ad 4 addita faciunt 7: ita $\frac{3}{8}$ *&* $\frac{4}{8}$ *addita faciunt* $\frac{7}{8}$.

Eadem *est* ἀπόδειξις *cæterorum additionis casuum.*

Ἐκθ. Secundi casus. *Sint datæ duæ minutiæ, diuersæ denominationis,* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

Δ. Oportet *has duas minutias addere.*

Κατασκευή. *Reduc prius ad eandem denominationem & reductas adde, ut in primo casu. Datæ igitur minutiæ* $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{2}{3}$ *prius reductæ faciunt* $\frac{3}{6}$ *&* $\frac{4}{6}$: *additæ vero* $\frac{7}{6}$.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $\frac{7}{6}$ *esse summam datarum minutiarum* $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{2}{3}$.

Ἐκθ. tertij casus. *Sint duo numeri* $2\frac{1}{4}$ *&* $\frac{2}{3}$, *quorum unus est fractio mixta: alter simplex.*

Δ. Oportet $2\frac{1}{4}$ *addere* $\frac{2}{3}$.

Κατ. *Si mixta fractio sit addenda simplici, relinque integrum, & adde duas fractiones. Hic igitur* $2\frac{3}{4}$ *addita* $\frac{2}{3}$ *faciunt* $2\frac{17}{12}$. *Nam* $\frac{3}{4}$ *&* $\frac{2}{3}$ *reducta ad aequales denominatores sunt* $\frac{9}{12}$ $\frac{8}{12}$. *Atqui 9 & 8 sunt 17.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* $2\frac{17}{12}$ *siue* $3\frac{5}{12}$ *esse summam duorum numerorum* $2\frac{3}{4}$ *&* $\frac{2}{3}$.

Ἐκθ. quarti casus. *Sint duae fractiones* $3\frac{3}{4}$ *&* $5\frac{2}{4}$.

Δ. Oportet $3\frac{2}{4}$ *addere* $5\frac{3}{4}$.

Κατασκ. *Si utrique minutiae adhaeserint integra, adde integra seorsim, & similiter minutias: In nostro igitur exemplo* $3\frac{2}{4}$ *addita* $5\frac{3}{4}$ *faciunt* $8\frac{5}{4}$, *siue* $9\frac{1}{4}$. *Nam* $\frac{5}{4}$ *faciunt* $1\frac{1}{4}$.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* $9\frac{1}{4}$ *esse summam duarum minutiarum* $3\frac{2}{4}$ *&* $5\frac{3}{4}$.

σχόλιον.

Additae minutiae dicuntur, cum plures in unam summam collectae per unam minutiam repraesentantur.

Ratio reductionis ad aequales denominatores est eadem, quae in integris. Nam si velim, verbi gratia, addere in unam summam 3 fl. & quinque bacios, necesse est me primum florenos in 45 bacios resoluere, & tum summa erit 50 baciorum. Erraret qui sic diceret, 3 & 5 faciunt 8. Similia enim numerant similia, axioma 7.

Integrum peculiari praecepto fractioni non additur: sed fit fractio mixta, quae ad simplicem reduci potest per modum reductionis supra explicatum. Sic 7 addita $\frac{4}{5}$ faciunt $7\frac{4}{5}$ vel per reductionem $\frac{39}{5}$.

Quod si fuerint plures quàm duae minutiae, adde duas: productũ adde tertiae, & sic deinceps: ut tres minutiae $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ per reductionem ad aequales denominatores, & additionem numeratorum faciunt $2\frac{13}{60}$. Nam $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ summa est $\frac{17}{12}$: rursus $\frac{17}{12}$ & $\frac{4}{5}$ summa est $2\frac{13}{60}$. Sed quo fiat expeditius, ex summis, quae fuerint fractiones valentes plus integro, monades segregato: & ex his quae superrerint particulis additionem facito, & ultimae summae sepositas monades adijcito: ut quatuor minutiae $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{3}{4}$ breuius sic addentur. Additis $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ summa fit $\frac{7}{6}$: quae quoniam plus valent integro seposita monade, residuum

quod

quod est $\frac{1}{8}$ adde cum $\frac{5}{7}$ fit summa $\frac{43}{42}$: resolue fit $1\frac{1}{42}$, & sublata monade restat particula $\frac{1}{42}$ quam adde ad $\frac{3}{4}$ fit summa $\frac{130}{168}$ & reducendo $\frac{65}{84}$. Adde sepositas monades, fit particularum cum integris relictis summa $2\frac{65}{84}$.

Fit & additio fractionum simplicium speciali modo, nempe tali, quem Barlaamus tradit. Adde denominatores & fiet nouus numerator: multiplica eosdem, & fiet nouus denominator: ut $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{7}{12}$. Nam 3 & 4 sunt 7, nouus numerator: & ter, quatuor sunt 12, nouus denominator. Vel sic. Diuiduum duorum denominatorum, imprimis minimum quære: inuentum per eosdem denominatores seorsim diuide: coniuncti quotis suppositi minutiæ numeratorem indicabũt: cuius numerator erit diuiduus, isq; minimus: ut $\frac{1}{3}$ addita $\frac{1}{3}$ facit $\frac{2}{3}$. Nam diuiduus denominatorum, isque minimus est 3. Facta diuisione trium per 3, quotus est 1 & 1, quæ coniuncta faciunt 2, nouum numeratorẽ: quibus subscribitur diuiduus minimus, nempe 3. Quod si numerator non sit unitas, inuentum minimum in numeratorem ducas: productum per denominatorem diuide, ut sint addendæ $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$: minimus diuiduus est 12: isq; nouus denominator. Rursus diuiduum diuide per denominatores, & fiunt 4 & 9, quæ coniuncta faciunt numeratorem nouæ fractionis, nempe 13. Erit igitur summa $\frac{13}{12}$.

Probatio additionis fit vel per additionem valoris fractionum, vel per subtractionem.

Per additionem valoris, ut dum has minutias $\frac{1}{2}\frac{2}{3}$ addis, perinde est, ac si semissi iungas bessem, hoc est, sex uncias uncijs octo: ubi colliguntur 14 unciæ, siue septem sextantes, sic $\frac{7}{6}$. vel quod idem est, as cum sextante sic, $1\frac{1}{6}$.

Per subtractionem sic. Subtracta altera minutiarum addendarum ex summa collecta remanebit altera, si in additione erratum non est: ut quoniam hæ minutiæ $\frac{1}{5}\frac{1}{6}$ additæ faciunt $\frac{11}{30}$: si ex hac summa subtrahatur prior minutia, nempe $\frac{1}{5}$ remanebit hæc minutia $\frac{25}{150}$, quæ per reductionem ad minimos terminos æqualis est alteri minutiæ $\frac{1}{6}$.

Quod si plures sint addendæ minutiæ, subtracta una earum ex summa, relinquetur minutia alijs simul sumtis æqualis.

SVBTRACTIO FRACT.

ϖϱότασις. Minutiam minorem à maiore subtrahere.

Tot sunt casus, quot in additione, ...

ἔκθ. primi casus. *Sint data minutia eiusdem denominationis* $\frac{4}{11}$ *&* $\frac{9}{11}$.

Διορ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατασκ. *Subtrahe 4 à 9, id est, minorem numeratorem à maiore, restant: 5 cui denominatorem subscribe, & fiunt* $\frac{5}{11}$.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico residuum ex subtractione* $\frac{4}{11}$ *à* $\frac{9}{11}$ *esse* $\frac{5}{11}$.

Ἀπόδειξις. διὰ δυοῖν.

1 Syll. sententia. *Quantitates, quarum denominatores sunt aequales: sunt ad se inuicem sicut numeratores. Hic sunt dua fractiones, aequalis denominationis. Ergo hae dua fractiones sunt ad se inuicem sicut 9 & 5 numeratores.*

2 Syll. 11 sententia. *Quorum eadem est ratio, qua numeratorum, eorum eadem est subtractio & residuum, quod integrorum.*

Hic $\frac{4}{11}$ *ad* $\frac{9}{11}$ *eadem est ratio, qua 4 ad 9. Ergo ut residuum ex subtractione 4 à 9 est 5, ita residuum ex subtractione* $\frac{4}{11}$ *à* $\frac{9}{11}$ *est* $\frac{5}{11}$. quod fecisse oportuit. Eadem *apodixis est sequentium casuum.*

ἔκθ. secundi casus. *Sint dua minutia* $\frac{7}{9}$ *&* $\frac{5}{6}$. *Hic data minutia non sunt eiusdem denominationis.*

Δ. Oportet *ex his minutijs minorem à maiori subtrahere.*

Κατασκευή. *Si data minutia non fuerint eiusdem denominationis, reduc eas ad aequales denominatores. Sic* $\frac{7}{9}$ *subtracta à* $\frac{5}{6}$ *relinquunt 3, quia* $\frac{7}{9}$ *&* $\frac{5}{6}$ *reducta ad aequales denominatores faciunt* $\frac{42}{54}$ $\frac{45}{54}$. *Et 42 à 45 subtracta relinquunt 3.*

Si mixta fractio sit subtrahenda à mixta: vel simplex ab integro: reducenda prius mixta ad simplicem: & integrum frangendum subscripta unitate: ut $2\frac{1}{2}$ *subtractis ex* $3\frac{1}{4}$ *relinquunt* $\frac{6}{8}$, *siue* $\frac{3}{4}$. *Ex mixtis enim fractionibus fiunt hae simplices,* $\frac{5}{2}$ $\frac{13}{4}$, *quae reducta ad aequales denominatores faciunt* $\frac{20}{8}$ $\frac{26}{8}$. *Iam subtractis 20 à 26, restant* $\frac{6}{8}$.

Sic si quis auferre velit $2\frac{3}{4}$ *ex numero 5: primum ex* $2\frac{3}{4}$ *faciet* $\frac{11}{4}$, *& ex*

$\frac{11}{4}$, *& ex quinq; $\frac{5}{1}$: reducet postea ad æquales denominatores, unde fient $\frac{11}{4}$ $\frac{20}{4}$. Iam subtractis 11 à 20 restant $\frac{9}{4}$, quod valet $2\frac{1}{4}$. Vel hoc modo. Ex quinq; frange solùm monadem, & fiet $\frac{1}{1}$, deinde integrum ab integro subtrahe: ut 2 à 4 (Monas enim iam à quinq; subtracta est) restant 2: tandem $\frac{3}{4}$ ab $\frac{1}{1}$: reductione prius facta ad æquales denominatores, nempe $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$, restat $\frac{1}{4}$ quibus addita 2 antea reseruata faciunt $2\frac{1}{4}$, ut prius.*

Si quando una minutia à pluribus fuerit auferenda: vel plures ab una: vel plures à pluribus: tum plures per additionem in unam summam colligi debent, ut duo saltem fiant numeri: unus subtrahendus: & alter, à quo fieri debet subtractio.

σχόλιον.

Subtracta minutia minor à maiore dicitur, cum inuenitur ea minutia, quæ quantitatem, qua maior minorem excedit, continet.

In minutijs, quarum numerator est unitas, subtractionem expeditè sic efficies. Quod fit ex multiplicatione denominatorum, subijcias lineolæ: quod autem fit ex eorundem subductione, eidem imponas: ut $\frac{1}{10}$ ab $\frac{1}{3}$ subtracta, relinquit $\frac{7}{30}$. Nam ter 10 sunt 30, & 3 à 10 subtracta, relinquunt 7.

Probatio subtractionis fit vel per additionem, vel per subtractionem. Per additionem sic.

Si minutia relicta subtractæ minutiæ addatur, colligitur minutia illa, à qua subtractio facta est si non est erratum: ut quoniam subtracta hæc minutia $\frac{1}{10}$ ex $\frac{1}{3}$ relinquit $\frac{7}{30}$: si addantur $\frac{7}{30}$ ad $\frac{1}{10}$. componetur hæc minutia $\frac{100}{300}$, quæ ad minimos terminos reducta facit $\frac{1}{3}$.

Per subtractionem sic. Aufer residuum inuentum à toto, & restituetur altera pars, id est, subtracta minutia: ut in præcedenti exemplo, si auferam $\frac{7}{30}$ ab $\frac{1}{3}$, remanent $\frac{9}{90}$ siue $\frac{1}{10}$.

MVLTIPLICATIO FRACT.

πρότασις. Minutiam datam in alteram multiplicare.

Quatuor sunt casus. Aut enim fractio simplex in simplicem, aut in integrum: aut mixta in mixtam, aut in simplicem ducitur.

M ἔκθ.

Ἐκθ. primi casus. *Sint datæ minutiæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$.*

Δ. Oportet *has datas minutias inter se multiplicare, hoc est, inuenire eam minutiam, ad quam sint $\frac{2}{3}$ sicut unitas ad $\frac{3}{4}$.*

Κατασκευή. *Primùm duo multiplicans 3 producat 6, & productum scribatur supra lineolam. Secundò 3 multiplicans 4 faciat 12: & productum scribatur infra lineolam.*

Δ *Dico $\frac{6}{12}$ esse quæsitam minutiam, hoc est, unitatem esse ad $\frac{3}{4}$, sicut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{6}{12}$.*

Κατ. demonstrationis. *3 in 6 producat 18: 2 in 12 producat 24.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. *Datis duabus minutijs si numerator unius ducatur in denominatorem alterius: & numerator alterius in denominatorem prioris: erit proportio prioris minutiæ ad secundam sicut numeri producti primi ad numerum producti secundi.*

Hic sunt duæ minutiæ $\frac{2}{3}$ & $\frac{6}{12}$: & 3 multiplicans 6 producit 18: & 2 multiplicans 12 producit 24. Ergo inter $\frac{6}{12}$ & $\frac{2}{3}$ est eadem proportio, quæ inter 18 & 24.

2 Syll. 12 axioma. *Si numerus multiplicauerit duos numeros: procreati inde habebunt cum multiplicatis rationem eandem. Hic 2 multiplicans 3 & 12 producit 6 & 24. Ergo sicut 3 ad 12, sic 6 ad 24, hoc modo, 2<$\frac{3}{12}$—$\frac{6}{24}$. Et ἐναλλάξ, sicut 3 ad 6, sic 12 ad 24.*

3 Syll. *Per eandem probatur eadem ratio inter 4 & 6, quæ est inter 12 ad 18: & ἀνάπαλιν 6 ad 4 quæ 18 ad 12, hoc modo. 3<$\frac{4}{6}$ $\frac{12}{18}$. Tria enim multiplicans 4 & 6, producit 12 & 18.*

4 Syll. 22 Sept. Eucl. *Si fuerint tres vel plures numeri, qui bini sumantur, & in eadem ratione: fuerit autem perturbata eorũ proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. Hic sunt tres numeri 4, 6, 3 & totidem alij 24, 12, 18: suntq́; bini in eadem perturbata ratione, hoc est, ut 4 ad 6, sic 12 ad 18: & ut 6 ad 3, ita 24 ad 12. Ergo ἐξ ἴσου ut 4 ad 3: ita 24 ad 18: & ἀνάπαλιν ut 3 ad 4, ita 18 ad 24.*

5 Syll.

5 Syll. com. sententia: *Quæ uni sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Hic 3 ad 4 ita se habet, ut 18 ad 24: 18 vero ad 24 ut* $\frac{6}{12}$ *ad* $\frac{2}{3}$ *per primum syllogismum. Ergo 3 ad 4 ita se habet, ut* $\frac{6}{12}$ *ad* $\frac{2}{3}$.

6 Syll. axioma *Omnis minutia ad unitatem est sicut numerator eius ad denominatorem. Ergo* $\frac{3}{4}$ *ad unitatem sicut 3 ad 4: & ἀνάπαλιν unitas ad* $\frac{3}{4}$, *ut 4 ad 3: siue* $\frac{2}{3}$ *ad* $\frac{6}{12}$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔκθ. secundi casus. *Sit data minutia* $\frac{3}{7}$.

Διορ. Oportet *hanc per integrum 4 multiplicare.*

Κατασκ. *4 multiplicet numeratorem & producat 12. Productū supra: denominatorem infra scribe hoc modo* $\frac{12}{7}$.

Δ. *Dico* $\frac{12}{7}$ *siue* $1\frac{5}{7}$ *esse minutiam quæsitam.*

Ἀπόδειξις est eadem, *quæ præcedentis casus. Nam integrum fingitur subscripta unitate frangi.*

Eadem est ἀπόδειξις aliorum multiplicationis casuum. Mixta enim fractio ad simplicem redigitur. Sic $2\frac{1}{3}$ *in* $3\frac{2}{5}$ *ducta faciunt* $7\frac{14}{15}$. *Mixtæ enim fractiones reductæ ad simplices sunt hæ* $\frac{7}{3}$ *&* $\frac{17}{5}$. *Quæ in se inuicem ducta faciunt* $\frac{119}{15}$, *hoc est,* $7\frac{14}{15}$ $\frac{14}{15}$. *Sic* $5\frac{1}{6}$ *ducta in* $\frac{3}{4}$ *faciunt* $3\frac{21}{24}$. *Ex mixta enim fractione fit hæc simplex* $\frac{31}{6}$: *quæ ducta in* $\frac{3}{4}$ *producit* $\frac{93}{24}$, *id est,* $3\frac{21}{24}$. *Et* $4\frac{1}{2}$ *ducta in 3 faciunt* $13\frac{1}{2}$.

Σχόλιον.

Multiplicare minutiam in minutiam est inuenire minutiam, ad quam sit multiplicanda, sicut unitas ad multiplicantem.

Multiplicatio in minutijs, in quibus alterni termini sunt compositi, breuius fiet hoc modo, Loco terminorum compositorum sumantur minimi: & tum demum multiplicatio peragetur. V. G. Sint minutiæ $\frac{2}{4}$ multiplicandæ per $\frac{5}{7}$; hic pro datis terminis sumantur $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{7}$, tumque multiplicatis numeris inter se emergent $\frac{5}{14}$ cuius termini sunt inter se primi. Sic sint $\frac{3}{4}$ ducendæ in $\frac{5}{18}$: hic cum 3 & 18 alterni termini inter se sint compositi, minimos per reductionem inuentos 1 & 6 eorum loco sumemus & fient minutiæ minores sic $\frac{1}{4}$ & $\frac{5}{6}$: quibus inter se multiplicatis emergunt $\frac{5}{24}$, cuius termini sunt inter se primi, ut supra. Sic $\frac{3}{7}$ per $\frac{14}{15}$ multiplicandæ, primum ad $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{5}$ reducuntur, hoc modo $\frac{3}{15}|\frac{1}{5}$ $\frac{14}{7}|\frac{2}{1}$, quæ inter se multiplicata $\frac{2}{5}$ faciunt.

M 2 Quod

Quod si termini alterni inter se æquales sunt, multiplicatio neglectis æqualibus primo numeratore supra: ultimo denominatore infra scripto procedit: ut sint inuicem multiplicandæ $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{7}\ \frac{7}{8}$, hic reiectis omnibus intermedijs & æqualibus terminis $\frac{2}{8}$, seu per reductionem $\frac{1}{4}$ productum erit. Ratio est hæc. Nam alterni termini, tanquam inter se compositi per reductionem ad eandem denominationem ad unitates reducuntur sic. $\frac{2}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{8}$. Cum igitur unitas non multiplicet, ideo hic binarius in quatuor sui ordinis unitates multiplicatus redit, similiterq; octonarius. Est igitur compendium porisma prioris.

In multiplicatione non est necesse fractiones dissimiles ad æquales denominatores reducere: quod si fiat, idem productum emerget, sed longiori opere.

Si minutia per integrum multiplicanda est: & integrum multiplicans sit æquale denominatori fractionis, tunc numerator eius minutiæ erit æqualis producto multiplicationis, ut $\frac{3}{7}$ ductis in 7 integra, productum est 3. Sic $\frac{2}{5}$ ductis in 5, productum est 2.

Numerorum aliquotæ partes à totis denominatæ in seipsas si multiplicentur, portiones producunt ipsorum numerorum cognomines: ut $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{3}$ facit $\frac{1}{9}$, id est, triens trientis nona pars unitas est.

Ex analogia multiplicationis patet, fragmenta fragmentorum in fragmenta simplicia per solam multiplicationem rectè reduci: id quod in re numerata facile animaduerti potest: ut $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ floreni sunt $\frac{6}{12}$, siue $\frac{1}{2}$, id est, semissis floreni. Sic $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ gradus sunt $\frac{3}{12}$, id est, $\frac{1}{4}$. Nam $\frac{3}{4}$ fl. sunt cr. 45. $\frac{2}{3}$ sunt cr. 30: hoc modo, 1 d. 45. q. $\frac{2}{3}$ F. 30. Et $\frac{1}{3}$ gr. sunt scr. 20: $\frac{3}{4}$ sunt scr. 15: quæ $\frac{1}{4}$ gradus æquât, hoc modo. 1. d. 20, q. $\frac{3}{4}$ F. 15. Sic idem sunt, si dicam, semissis per $\frac{5}{6}$: & semissis de $\frac{5}{6}$; vel semissis $\frac{5}{6}$, id est, $\frac{5}{12}$.

Minutia ex multiplicatione producta, interdum minor est altero producentium: interdum minor minutia utraque, quæ multiplicatur, id est, multiplicante & multiplicando. Minor altero producentium est, si bis, ter, quater, quinquies, & sexies, & sæpius sumatur, ut $\frac{5}{6}$ sexies sumtæ faciunt quinque integra: hic quinque sunt minus quàm sex: sed plus quàm $\frac{5}{6}$. Minor utraque minutia est, si minus quàm semel sumatur: ut $\frac{5}{6}$ ductæ in $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{15}{24}$: hinc $\frac{15}{24}$ sunt minus quàm $\frac{5}{6}$ & $\frac{3}{4}$: & seorsim & coniunctim. Quo igitur major est numerus multiplicans, eius qui multiplicari debet, eò majus etiam produ-

productum est: & quo minor, eò etiam minus. Quod si semel minutia sumitur: cum unitas non multiplicet, minutia ipsa prouenit: integrum vero dimidiatè sumtum est dimidium, hoc modo.
$\frac{1}{1}$ ⊏ $\frac{1}{2}$ *facit* $\frac{1}{2}$.

Causa huius rei pendet ex definitione multiplicationis. Est enim multiplicatio additio multiplicandi toties, quoties unitas in multiplicante continetur: ut $\frac{1}{2}$ ducta in $\frac{1}{4}$ facit $\frac{1}{8}$. Nam $\frac{1}{4}$, non est unitas, sed particula: & $\frac{1}{4}$ de semisse indicat semissem in quatuor: integrū in 8 partes diuisum. Erit igitur $\frac{1}{4}$ semissis, una octaua unius integri. Sic 9 per $\frac{1}{3}$ multiplicata facit $\frac{9}{3}$, id est, nouies una tertia facit ternarium. Nam primum una tertia ter sumta facit unam unitatem: secundo ter sumta alteram unitatem, tertio ter sumta tertiam unitatem.

Differt igitur multiplicatio fracti & integri numeri. Multiplicatio fracti minuit. Multiplicatio integri auget. Illa est partitio: hæc propriè additio. In integris semper productum est maius multiplicante, & multiplicando: in minutijs semper minus, vel alterutro, vel utroque simul.

Multiplicationem esse partitionem hinc patet. Nam v. g. $\frac{1}{3}$ per $\frac{5}{6}$ multiplicata facit $\frac{5}{18}$. Tantum producitur, si diuidas $\frac{5}{6}$ per $\frac{3}{1}$. Idem igitur est, siue dicas: da $\frac{1}{3}$ ex $\frac{5}{6}$ siue diuide $\frac{5}{6}$ per $\frac{3}{1}$.

Examinatur multiplicatio per diuisionem. Si enim minutia inuenta diuidatur per alteram minutiarum datarum, prodibit necessariò in quoto altera minutia multiplicans: ut si ex multiplicatione $\frac{4}{8}$ cum $\frac{5}{7}$ fiunt $\frac{20}{56}$, necesse est, ut diuisis $\frac{20}{56}$ per $\frac{4}{8}$ producantur $\frac{5}{7}$: diuisis autem ijsdem $\frac{20}{56}$ per $\frac{5}{7}$ gignuntur $\frac{4}{8}$.

Minutiam datam duplare si velis, numeratoris illius duplo denominatorem subscribito: vel etiam denominatoris dimidio numeratorem supra ponito: ut $\frac{4}{9}$ duplum est $\frac{8}{18}$. Et $\frac{3}{8}$ duplum $\frac{3}{4}$.

DIVISIO FRACTIONVM.

πρότασις. Minutiam simplicem per minutiam simplicem diuidere.

Tot sunt casus diuisionis, quot multiplicationis. Et rursus aut numeri diuidentis minutiæ metiuntur numeros diuidendæ, aut non metiuntur. Et deniq; utriusq; fractionis communis est denominator, aut diuersus.

ἐκθ. primi casus. *Sint duæ minutiæ se inuicem metientes* $\frac{9}{10}$ *&* $\frac{3}{5}$.

Δ. Oportet $\frac{9}{10}$ *diuidere per* $\frac{3}{5}$, *ut sinistra minutia* $\frac{9}{10}$ *sit diuidenda: dextra* $\frac{3}{5}$ *sit diuidens.*

Κατ. *Si numeri diuidentis minutiæ metiuntur numeros diuidendæ, fit processus, ut in diuisione integrorum : ut in dato exemplo, 3 metitur 9 in 3 : & 5 metitur 10 in 2.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $\frac{3}{2}$ *esse quæsitam minutiam, hoc modo.* $\frac{9}{10}$ — $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{2}$.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. *Diuisis minutijs per eos numeros, per quos quantitas illarum significatur, elicitur quotus.*

Quantitates harum minutiarum $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$ *significantur per tres numeros 9, 3 & 10, 5. Ergo diuiso 9 per 3 & 10 per 5 prouenit quotus in morem fractionis sic scriptus* $\frac{3}{2}$, quod propositum fuit.

ἐκθ. Secundi casus. *Sint duæ minutiæ* $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{8}$, *quarum communis denominator est 8.*

Δ. Oportet $\frac{6}{8}$ *per* $\frac{3}{8}$ *diuidere.*

Κατασ. *Diuisoris numerator alteri numeratori subscribatur, hoc modo* $\frac{6}{3}$.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* $\frac{6}{3}$ *esse quotum quæsitum. Sunt autem* $\frac{6}{3}$ *nihil aliud quàm 2 integra. De hoc casu plura in scholio.*

ἐκθ. tertij casus. *Sint duæ minutiæ* $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ ὡς ἔτυχε, *quarum numeri se inuicem non metiuntur.*

Δ. Oportet $\frac{1}{5}$ *minutiam per* $\frac{3}{4}$ *diuidere.*

Κατασκευή. *Primum 1 multiplicans 4 producat 4, pro numeratore quoti. Secundo 5 multiplicans 3 producat 15 pro denominatore quoti. Fit igitur diuisio multiplicando numeratores & denominatores inter se decussatim.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* $\frac{4}{15}$ *esse quotum siue minutiam exeuntem ex diuisione datarum minutiarum.*

Κατ.

Κατ. demonstr. *Fiat reductio duarum minutiarum ad æquales denominatores per reductionis doctrinam. Ex duabus igitur datis minutijs, quarum dissimiles sunt denominationes, fiunt aliæ duæ* $\frac{4}{20}$, $\frac{15}{20}$, *quarum æquales sunt denominatores.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 9 axioma. *Si fuerint duæ minutiæ eiusdem denominationis, eadem erit proportio minutiarum, quæ numeratorum. Hic sunt duæ minutiæ* $\frac{4}{20}$ $\frac{15}{20}$, *eiusdem denominationis. Ergo ut se habent* $\frac{4}{20}$. *ad* $\frac{15}{20}$, *ita 4 ad 15.*

2 Syll. 11 sententia. *Quorum eadem est ratio quæ numeratorũ: eorundem est eadem diuisio. Ergo ut 4 integra diuisa per 15 faciunt* $\frac{4}{15}$: *sic minutiæ* $\frac{4}{20}$ *diuisa per* $\frac{15}{20}$. *faciunt* $\frac{4}{15}$.

Potest verò & reductio diuidendæ minutiæ fieri ad æquipollentem: quæ per diuidentem minutiam præcisè diuidi potest: multiplicando partes diuisoris in se, & productum bis multiplicando, primùm in numeratorem diuidendæ: deinde in denominatorem eiusdem: & producta in morem fractionis scribendo: quæ per numeros diuidentis diuisa quotum patefaciunt. In dato igitur exemplo ex $\frac{1}{5}$ *fient* $\frac{12}{60}$, *æquipollentes* $\frac{1}{5}$, *eius condicionis, ut numeri diuidentis præcise numeros diuidendæ metiantur, hoc modo* $\frac{12}{60}$. $\frac{3}{4}$ ($\frac{4}{15}$. *Porro 12 prouenit ex ductu 3 in 4 (quæ alteram minutiam constituunt) Rursus 12 numerator alterius diuidendi exit ex ductu 1 in 12: ut 60 ex ductu 5 in 12. Sunt autem 1 & 5 numeri primæ minutiæ diuidendæ.*

Apodixis huius κατασκευῆς *est eadem quæ primi casus.*

Apodixis prolixior & obscurior habetur apud alios Arithmeticos.

Eadem est ἀπόδειξις *aliorum diuisionis casuum. Minutia enim data simplex per integrum diuiditur, integro primum reducto ad fractionem simplicem, subscripta unitate: deinde ductis in se decussatim numeris: ut* $\frac{2}{7}$ *diuisis per 4 exeunt* $\frac{2}{28}$, *hoc modo* $\frac{2}{7} \times \frac{4}{1} \mid \frac{2}{28}$.

Mixta vero fractio ad simplicem reducitur, & integrum nu-

dum

dum subiecta unitate frangitur: ut $4\frac{2}{3}$ diuisis per $\frac{8}{9}$, emergunt $5\frac{1}{4}$. Sic $3\frac{4}{5}$ diuisis per $2\frac{5}{8}$ emergunt $1\frac{22}{85}$. Et $5\frac{1}{3}$ diuisis per 7, exeunt $\frac{16}{21}$.

σχόλιον.

1. Diuidere minutiam per minutiam est inuenire minutiam, quæ sit ad unitatem, sicut diuidenda ad diuidentem, id est, quæ indicat, quoties una minutia in altera contineatur.

2. Si numeratores sunt pares, tunc diuidendi denominator diuidentis denominatori simpliciter subijcitur, ut $\frac{5}{8}$ per $\frac{5}{9}$ diuisis exeunt $\frac{9}{8}$, siue $1\frac{1}{8}$.

3. Si denominatores fuerint pares, tunc numeratores alter per alterum diuiduntur: denominatoribus abiectis, ut $\frac{6}{8}$ diuisis per $\frac{2}{8}$ proueniunt tria. Et $\frac{9}{8}$ diuisis per $\frac{7}{8}$ exeunt $1\frac{2}{7}$.

4. Quando fractiones inter se diuiduntur, tum numerus diuidendus scribitur sinistro loco: diuisor dextro loco: postea si termini diuisoris inuertantur, fit diuisio perinde ut multiplicatio: ducendo numeratorem in numeratorem: & denominatorem in denominatorem: ut $\frac{3}{4}$ sint diuidendæ per $\frac{5}{6}$. Hic inuersione sic facta $\frac{3}{4}$ per $\frac{6}{5}$ per directam lineam sic multiplico. Ter sex sunt 18: & quater quinque sunt 20. Quotus igitur est $\frac{18}{20}$.

5. Si minutiæ non sunt eiusdem denominationis, reducantur: & numerator diuisoris subijciatur numeratori diuidendi: ut sint duæ minutiæ diuersæ denominationis $\frac{4}{5}$ & $\frac{6}{7}$ quæ diuidi debent. Hæ reductæ ad æquales denominatores sic se habent. $\frac{28}{35}$ $\frac{30}{35}$: diuisæ autem per præcedentem regulam faciunt $\frac{28}{30}$.

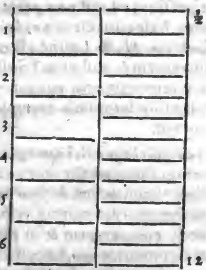
6. Plurimum hic commoditatis adfert reductio minutiarum ad minimos terminos per communem mensuram: ut sint diuidendæ $\frac{7}{14}$ per $\frac{6}{8}$: hic minimos terminos primùm sic facio $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{4}$: quibus inter se diuisis exeunt $\frac{4}{6}$ siue $\frac{2}{3}$.

7. Quotus interdum maior, interdum minor est minutia diuisa. Maior est, cum diuisor minor est quàm unitas: & quàm minutia diuidenda: ut sex diuisis per $\frac{1}{2}$, emergunt 12. Hic 12 plus est, quàm vel $\frac{1}{2}$, vel sex. Sic $\frac{3}{4}$ diuisis per $\frac{2}{3}$, prodeunt $\frac{9}{8}$. id est, $1\frac{1}{8}$: numerus maior, quàm diuidendus & diuisor. Hic enim diuisor minor diuidendo.

Minor est, cum diuisor maior est quàm unitas & quàm minutia diuidenda: ut $\frac{3}{4}$ diuisis per $\frac{5}{6}$, quia $\frac{5}{6}$ sunt plus unitate & quàm $\frac{3}{4}$. prodit quotus $\frac{9}{10}$, maior & diuidendo & diuisore.

8. Causa

8. Causa huius rei ex definitione diuisionis pendet. Cum enim diuisio nihil aliud sit, quàm inuentio, quoties diuisor diuidendum contineat, hinc apparet, eò minus singulis cedere, quo plures ad aliquam rem diuidendam fuerint: contrà tantò plus, quò pauciores. Praeterea, cùm, verbi gratia, 6 per $\frac{1}{2}$ diuisis emergunt 12, hic 12 non 12 integra denotant: sed partes duodecimas: quòd $\frac{1}{2}$ duodecies in senario contineatur: id quod ex sequenti schemate euidenter apparet.



9. Examinatur diuisio per multiplicationem, ut in integris. Nam si quotus multiplicetur per diuisorem, producetur diuisus seu diuidendus: ut quia ex diuisione $\frac{5}{6}$ per $\frac{7}{8}$ producitur $\frac{40}{42}$, fit ut ex multiplicatione $\frac{40}{42}$ per $\frac{7}{8}$ producantur $\frac{280}{336}$, quae huic $\frac{5}{6}$ aequipollent.

10. Minutiam oblatam si dimidiare velis, vel numeratoris dimidium pone, vel denominatorem duplica: ut $\frac{2}{3}$ dimidiata relinquunt $\frac{1}{3}$. Et $\frac{4}{6}$ dimidiata relinquunt $\frac{4}{12}$.

LIBER TERTIVS ARITHMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ.

DE NVMERO RESPECTIVO.

DEFINITIONES.

1. Numerus respectiuus est, qui non per se, sed respectu alterius consideratur. Respectus Græcis σχέσις est, eaque duplex, λόγος & ἀναλογία. λόγος Latinè est ratio: ἀναλογία, proportio. Boëtius autem & post eum Tonstallus, Frisius & alij quidam, utrũq; proportionem vocant: quodq; ἀναλογία propriè est, id illi nullo latinitatis exemplo proportionalitatis nomine vocant.

2. λόγος ἐστὶ δύο ἀριθμῶν ἑτέρου πρὸς ἕτερον σχέσις, id est, ratio est duorum numerorum, unius ad alterum collatio, vel habitudo: vel, ut definit Nicomachus, δύο ὅρων ἡ πρὸς ἀλλήλους σχέσις, id est, duorum terminorum mutuus respectus. Numeri enim, qui hoc modo comparantur & in proportione constituuntur, more Geometrico ὅροι, hoc est, termini: & cùm medium aliquem habent, etiam ἄκρα, hoc est, extremitates vocantur. Prior ἡγούμενος: posterior ἑπόμενος dicitur: ille antecedens, hic consequens. V. G. 2. 4. 6. 8. 10. 12. sunt sex termini proportionales, iíque Arithmeticè: hi vero tres, 8. 16. 32 Geometricè: hi denique 2. 3. 6, harmonicè: de qua distinctione infra dicetur, sub titulo de proportione.

3. Est autem ratio alia æqualis, alia inæqualis. Æqualis est, cum termini sunt æquales: ut cum 8 ad 8: 10 ad 10 referuntur: vulgo ratio æqualitatis appellatur. Hoc utitur Algebra magno cum fructu. Obtinet autem quasi medium inter inæquale maius & minus. Nam ratio inæqualis maior decre-

decreſcendo accedit ad æqualitatem : minor creſcendo. Eſtque ratio æqualis, principij inſtar. Nam omnis inæqualitas ab æqualitate procedit, & ad eandem reducitur, ut probat Brucæus.

4. Inæqualis ratio dicitur, cum termini ſunt inæquales : eſtque aut maior, aut minor.

5. Maior eſt cum terminus ſibi comparatum excedit, ut 4 ad 2. Minor eſt cùm terminus, à ſibi comparato exceditur, ut 2 ad 4. Maior πρόλογος, minor ὑπόλογος dicitur.

πρόλογος igitur eſt, cúm terminus maior antecedit, & conſideratur, quæ ſit illius ad minorem exceſſus ratio. ὑπόλογος, ſeu ὑπέριθμος, cùm terminus minor antecedit, & quæ ſit illius à maiore diſtantiæ ratio, perpenditur : vulgo maior & minor inæqualitas.

6. Rurſus ratio inæqualis maior eſt duplex : ſimplex & compoſita. Simplex eſt πολλαπλάσιος, ἐπιμόριος, & ἐπιμερής. In tali comparatione maiores Boëtio dicuntur duces : minores vero comites : illi ſupernè : hi infernè ſcribuntur.

7. πολλαπλάσιος eſt multiplex, cum maior continet minorem præcisè : eſtq́; vel dupla, vel tripla, vel quadrupla, & ſic deinceps, ut 4 ad 2, 9 ad 3, 8 ad 2.

8 ἐπιμόριος eſt ratio partis, Boëtio ſuperparticularis, cùm maior minorem ſemel continet, & aliquam eius partem : eſtq́; vel ſeſquialtera, vel ſeſquitertia, vel ſeſquiquarta, & ſic deinceps : ut 3 ad 2, 4 ad 3, 5 ad 4. Seſquialtera & ſeſcupla, & Græcè ἡμιόλιος dicitur. Seſquitertia, ἐπίτριτος. Seſquiquarta, ἐπιτέταρτος, & ſic deinceps. Vt enim Græci in compoſitione addunt ἐπὶ : ſic Latini addunt ſeſqui.

9. ἐπιμερὴς eſt ratio partium : Boëtio ſuperpartiens, cùm maior continet minorem ſemel, & inſuper aliquot minoris particulas : eſtq́; vel ſuperbipartiens, ἐπιδιμερὴς : vel ſupertri-

partiens, ἐπιτριμερὴς: vel ſuperquadripartiens, ἐπιτετραμερὴς, & ſic deinceps in infinitum: ut 5 ad 3, ſuperbipartiens tertias, vel magis germano vocabulo ſupertritertius: 7 ad 4, ſupertripartiens quartas: vel potius ſuperbiquartus: 9 ad 5, ſuperquadripartiens quintas: vel potius, ſuperquadriquintus. Nomen huius rationis inchoatur apud Latinos à præpoſitione ſuper, ſicut apud Græcos à præpoſitione ἐπὶ. Media dictio ſumitur à numeratore fractionis: poſtrema à denominatore eiuſdem fractionis.

10. Compoſita inæqualis ratio eſt duplex: una compoſita ex prima & ſecunda ſpecie: altera ex prima & tertia.

Compoſita ex prima & ſecunda ſpecie, eſt multiplex ſuperparticularis: ex prima & tertia eſt multiplex ſuperpartiens.

11. Multiplex ſuperparticularis eſt, cùm maior minorem aliquoties continet, ac præterea unam minoris particulam: eſtque vel dupla ſeſquialtera: vel tripla ſeſquialtera, & ſic deinceps: vel dupla ſeſquitertia, vel tripla ſeſquitertia, & ſic deinceps in infinitum: ut ratio 5 ad 2 eſt dupla ſeſquialtera: 7 ad 2 eſt tripla ſeſquialtera: 7 ad 3 eſt dupla ſeſquitertia 10 ad 3 eſt tripla ſeſquitertia. Effertur enim nominibus ſimplicium, ex quibus conſtat. Græcis eſt λόγος πολλαπλασιεπιμόριος, id eſt, multiplex rationi partis iuncta.

12. Multiplex ſuperpartiens eſt, cùm maior minorem aliquoties continet, & inſuper aliquot minoris particulas: eſtque vel dupla ſuperbipartiens: vel dupla ſupertripartiens, & ſic deinceps: vel tripla ſuperbipartiens: vel tripla ſupertripartiens: & ſic deinceps in infinitum: ut ratio 8 ad 3 eſt dupla ſuperbipartiens tertias: 11 ad 4 dupla ſuperpartiens tres quartas: 11 ad 3, tripla, ſuperbipartiens tertias: 15 ad 4, tripla ſuperpartiens tres quartas. In his enim numeris alter alterum

terum totum vel bis, vel ter continet, & præterea aliquot eius partes. Græcis πολλαπλασιεπιμερὴς, id est, multiplex partium rationi iuncta.

13. Ratio inæqualis minor est, cùm minor confertur ad maiorem: estq́; tot generum quot maior: & in ijsdem terminis versatur, sed conuersis. Qui enim antea fuit antecedens, nunc est consequens, & contrà. Effertur igitur præpositione ὑπὸ & sub, singulis eorum nominibus apposita. Sic multiplici respondet submultiplex, ὑποπολλαπλάσιος: superparticulari subsuperparticularis, ὑπεπιμόριος: superpartienti sub superpartiens: ὑπεπιμερὴς. Et in compositis multiplici superparticulari submultiplex superparticularis, ὑποπολλαπλασιεπιμόριος: & multiplici superpartienti, submultiplex superpartiens, ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς: & in horum speciebus duplo subduplum, ὑποδιπλάσιον: sesquialteri, subsesquialtera, ὑφημιόλιος: subsesquitertia, ὑπεπίτριτος, & sic deinceps. Erit igitur 2 ad 4, submultiplex subduplus: 2 ad 3, subsesquialter: 4 ad 7 subsupertripartiens. 2 ad 5, subduplus subsesquialter.

14 Rursus ratio inæqualis alia rationalis: alia irrationalis. Rationalis est, cuius ratio est integra. Irrationalis est ratio fracta tanquam minutia alicuius rationis integræ. Illa denominatur ab aliquo numero: estque commensurabilis, certa & cognita: Græcis ῥητὸς, quasi dicibilis: ut quadrati diametri ad quadratum costæ: quæ dupla est Hæc non denominatur ab aliquo numero: Græcis ἄρρητος: estq́; comuni mensura destituta, confusa & ignota, non tantum nobis, sed & naturæ, ut quibusdam placet: ut inter costam & diametrum, vel ℞. 10 ad ℞. 7. Huiusmodi quantitates incommunicantes siue incommensurabiles dicuntur.

15. Et ratio alia est numeri integri, alia fracti.

TYPVS RATIONVM.

Ratio est vel

- Æqualis, cum termini sunt æquales, ut 8 ad 8.
- Inæqualis eaque vel
  - Maior siue
    - Simplex vel
      - Multiplex, eaque vel dupla, ut 4 ad 2, vel tripla, ut 6 ad 2, & sic deinceps.
      - Superparticularis, eaq; vel sesquialtera, ut 3 ad 2: aut sesquitertia, ut 4 ad 3: aut sesquiquarta ut 5 ad 4, & sic deinceps.
      - Superpartiens, eaque vel superbipartiens, ut 5 ad 3: vel supertripartiens, ut 7 ad 4: vel superquadripartiens, ut 9 ad 5, & sic deinceps.
    - Composita ex
      - Prima & secunda specie, & multiplex superparticularis, dicitur, estque aut dupla sesquialtera, ut 5 ad 2: aut tripla sesquialtera, ut 7 ad 2: aut tripla sesquitertia, ut 10 ad 3, & sic deinceps.
      - Prima & tertia, & multiplex superpartiens dicitur, eaque vel dupla superbipartiens, ut 8 ad 3: vel tripla supertripartiens, ut 11 ad 4: & sic deinceps.
  - Minor siue
    - Simplex vel
      - Submultiplex, eaque vel subdupla, ut 2 ad 4, vel tripla: ut 2 ad 6, & sic deinceps.
      - Subsuperparticularis, eaque vel subsesquialtera ut 2 ad 3, vel subsesquitertia, ut 3 ad 4, &c.
      - Subsuperpartiens, eaque vel subsuperbipartiens, ut 3 ad 5, vel subsupertripartiens, ut 4 ad 7, &c.
    - Composita ex
      - Prima & secunda specie: & submultiplex superparticularis dicitur, siue dupla, ut subdupla sesquialtera, ut 2 ad 5, &c.
      - Prima & tertia, & submultiplex superpartiens dicitur: ut 8 ad 3: & sic deinceps in iisdem terminis, sed conuersis, apposita tantum præpositione sub.

SCHOLIVM.

1. **NOTATIO.** Rationem eruditi interdum non vocibus, quæ insolentes sunt, & inusitatæ purioribus scriptoribus, appellant: sed duobus numeris repræsentant. Sic Archimedes rationem peripheriæ non ducit esse triplam sesquiseptimam: sed rationem ferè 22 ad 7.

2. REDVCTIO. Nulla est, ut fractio, sic & ratio, quæ non pluribus ac diuersis numeris scribi possit. Multum autem refert, ut numeri, per quos ratio aliqua designatur, inter se primi sint: Græcis πυθμενικοὶ ὅροι τῆς χώρας. Nam his species rationis commodius & dilucidius exprimi potest. Hic vero alia regula, quàm quæ in minutijs tradita est, opus non est. Requiritur enim communis mensura maxima, per quàm uterque terminus rationis ab initio positus diuidatur. Quoti enim, qui ex illa diuisione proueniunt, termini primi erunt: ut sint positi duo termini 27 & 36, quorum communis mensura maxima, inuenta per continuam diuisionem, nouem est: per quem utroque diuiso redduntur termini primi 3 & 4.

3. DENOMINATIO. Si nomen rationis inuenire voles, primum terminos datos reduc ad minimos: deinde maiorem diuide per minorem, id est, ducem per comitem, ut loquitur Boëtius: & quotus denominationem rationis indicat: ut sit exponenda ratio inter 63 & 21. Hic primi datorum numerorum termini minimi inueniuntur, qui sunt 1 & 3. Diuisione autem unius per tria facta exit ternarius, qui ostendit eam rationem esse triplam. Quod si vero 21 ad 63 conferatur, erit ratio subtripla. Sic ratio inter 9 & 8 est superparticularis epogdoa: ratio inter 8 & 9 est subsuperparticularis ὑπεπόγδοα, subsesquioctaua. Et ratio inter 5 & 32, ratio subsexcupla superbipartiens quintas. Hic idem numerus ab Arithmeticis rationis denominator & quantitas appellatur. Sic quantitas rationis duplæ est numerus binarius: triplæ ternarius: quadruplæ quaternarius.

4. REDVCTIO denominatæ rationis ad terminos. Denominatione rationis cognita, aut aliquod extremum habemus notum, aut nullum. Data ratione inter duos numeros, & uno eorum, dabitur & alter eorum, maior per multiplicationem, minor per diuisionem noti termini per numerum, qui eam rationem denominat: ut sit data ratio dupla, cuius maior terminus notus sit 10: minor ignotus. Hunc igitur eruere volentes 10 per 2, quæ duplam denominant, secamus: unde emergunt quinque, quæ terminum minorem exhibent. Rursus sit data ratio tripla: cuius minor terminus notus sit sex: maior ignotus. Tria igitur, quæ rationem, ut sit tripla, denominant, in sex ducimus, & nascitur terminus maior, videlicet 18. Quod si denominatione rationis cognita, neutrum eius terminum habeamus notum, numeros quoscunque, qui eam rationem forment pro arbitrio apponere poterimus.

5. INÆQVALITAS. Vna ratio esse maior altera sic dignoscitur. Disponantur in suis terminis datæ rationes, sic ut antecedens utrunque

Quod si termini alterni inter se æquales sunt, multiplicatio neglectis æqualibus primo numeratore supra ultimo denominatore infra scripto procedit: ut sint inuicem multiplicandæ $\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\,\frac{5}{7}\,\frac{7}{8}$, hic reiectis omnibus intermedijs & æqualibus terminis $\frac{2}{8}$, seu per reductionem $\frac{1}{4}$ productum erit. Ratio est hæc. Nam alterni termini, tanquam inter se compositi per reductionem ad eandem denominationem ad unitates reducuntur sic. $\frac{2}{1}\,\frac{1}{1}\,\frac{1}{1}\,\frac{1}{1}\,\frac{1}{8}$. Cum igitur unitas non multiplicet, ideo hic binarius in quatuor sui ordinis unitates multiplicatus redit, similiterq; octonarius. Est igitur compendium porisma prioris.

In multiplicatione non est necesse fractiones dissimiles ad æquales denominatores reducere: quod si fiat, idem productum emerget, sed longiori opere.

Si minutia per integrum multiplicanda est: & integrum multiplicans sit æquale denominatori fractionis, tunc numerator eius minutiæ erit æqualis producto multiplicationis, ut $\frac{3}{7}$ ductis in 7 integra, productum est 3. Sic $\frac{2}{5}$ ductis in 5, productum est 2.

Numerorum aliquotæ partes à totis denominatæ in seipsas si multiplicentur, portiones producunt ipsorum numerorum cognomines: ut $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{3}$ facit $\frac{1}{9}$, id est, triens trientis nona pars unitas est.

Ex analogia multiplicationis patet, fragmenta fragmentorum in fragmenta simplicia per solam multiplicationem rectè reduci: id quod in re numerata facile animaduerti potest: ut $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ floreni sunt $\frac{6}{12}$, siue $\frac{1}{2}$, id est, semissis floreni. Sic $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ gradus sunt $\frac{3}{12}$, id est, $\frac{1}{4}$. Nam $\frac{3}{4}$ fl. sunt cr. 45. $\frac{2}{3}$ sunt cr. 30: hoc modo, 1 d. 45. q. $\frac{2}{3}$ F. 30. Et $\frac{1}{3}$ gr. sunt scr. 20: $\frac{3}{4}$ sunt scr. 15: quæ $\frac{1}{4}$ gradus æquāt, hoc modo. 1. d. 20. q. $\frac{3}{4}$ F. 15. Sic idem sunt, si dicam, semissis per $\frac{5}{6}$: & semissis de $\frac{5}{6}$; vel semissis $\frac{5}{6}$, id est, $\frac{5}{12}$.

Minutia ex multiplicatione producta, interdum minor est altero producentium: interdum minor minutia utraque, quæ multiplicatur, id est, multiplicante & multiplicando. Minor altero producentium est, si bis, ter, quater, quinquies, sexies, & sæpius sumatur, ut $\frac{5}{6}$ sexies sumtæ faciunt quinque integra: hic quinque sunt minus quàm sex: sed plus quàm $\frac{5}{6}$. Minor utraque minutia est, si minus quàm semel sumatur: ut $\frac{5}{6}$ ductæ in $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{15}{24}$: hinc $\frac{15}{24}$ sunt minus quàm $\frac{5}{6}$ & $\frac{3}{4}$: & seorsim & coniunctim. Quo igitur major est numerus multiplicans, eius qui multiplicari debet, eò majus etiam

produ-

productum est: & quo minor, eò etiam minus. Quod si semel minutia sumitur: cum unitas non multiplicet, minutia ipsa prouenit: integrum vero dimidiatè sumtum est dimidium, hoc modo.

$1 = \frac{1}{2}$ *facit* $\frac{1}{2}$.

Causa huius rei pendet ex definitione multiplicationis. Est enim multiplicatio additio multiplicandi toties, quoties unitas in multiplicante continetur: ut $\frac{1}{2}$ ducta in $\frac{1}{4}$ facit $\frac{1}{8}$. Nam $\frac{1}{4}$, non est unitas, sed particula: & $\frac{1}{4}$ de semisse indicat semissem in quatuor: integrũ in 8 partes diuisum. Erit igitur $\frac{1}{4}$ semissis, una octaua unius integri. Sic 9 per $\frac{1}{3}$ multiplicata facit $\frac{9}{3}$, id est, nouies una tertia facit ternarium. Nam primum una tertia ter sumta facit unam unitatem; secundo ter sumta alteram unitatem, tertio ter sumta tertiam unitatem.

Differt igitur multiplicatio fracti & integri numeri. Multiplicatio fracti minuit. Multiplicatio integri auget. Illa est partitio: hæc proprie additio. In integris semper productum est maius multiplicante, & multiplicando: in minutijs semper minus, vel alterutro, vel utroque simul.

Multiplicationem esse partitionem hinc patet. Nam v. g. $\frac{1}{3}$ per $\frac{5}{6}$ multiplicata facit $\frac{5}{18}$. Tantum producitur, si diuidas $\frac{5}{6}$ per $\frac{3}{1}$. Idem igitur est, siue dicas: da $\frac{1}{3}$ ex $\frac{5}{6}$ siue diuide $\frac{5}{6}$ per $\frac{3}{1}$.

Examinatur multiplicatio per diuisionem. Si enim minutia inuenta diuidatur per alteram minutiarum datarum, prodibit necessariò in quoto altera minutia multiplicans: ut si ex multiplicatione $\frac{4}{8}$ cum $\frac{5}{7}$ fiunt $\frac{20}{56}$, necesse est, ut diuisis $\frac{20}{56}$ per $\frac{4}{8}$ producantur $\frac{5}{7}$: diuisis autem ijsdem $\frac{20}{56}$ per $\frac{5}{7}$ gignuntur $\frac{4}{8}$.

Minutiam datam duplare si velis, numeratoris illius duplo denominatorem subscribito: vel etiam denominatoris dimidio numeratorem supra ponito: ut $\frac{4}{9}$ duplum est $\frac{8}{18}$. Et $\frac{2}{8}$ duplum $\frac{2}{4}$.

DIVISIO FRACTIONVM.

πρότασις. Minutiam simplicem per minutiam simplicem diuidere.

Tot sunt casus diuisionis, quot multiplicationis. Et rursus aut numeri diuidentis minutia metiuntur numeros diuidendæ, aut non metiuntur. Et deniq; utriusq; fractionis communis est denominator, aut diuersus.

ἔκθ. primi casus. *Sint due minutiæ se inuicem metientes* $\frac{9}{10}$ *&* $\frac{3}{5}$.

Δ. Oportet $\frac{9}{10}$ *diuidere per* $\frac{3}{5}$, *ut sinistra minutia* $\frac{9}{10}$ *sit diuidenda: dextra* $\frac{3}{5}$ *sit diuidens.*

Κατ. *Si numeri diuidentis minutiæ metiuntur numeros diuidendæ, fit processus, ut in diuisione integrorum: ut in dato exemplo, 3 metitur 9 in 3: & 5 metitur 10 in 2.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $\frac{3}{2}$ *esse quæsitam minutiam, hoc modo.* $\frac{9}{10}$ — $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{2}$.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. *Diuisis minutijs per eos numeros, per quos quantitas illarum significatur, elicitur quotus.*

Quantitates harum minutiarum $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$ *significantur per tres numeros 9, 3 & 10, 5. Ergo diuiso 9 per 3 & 10 per 5 prouenit quotus in morem fractionis sic scriptus* $\frac{3}{2}$, quod propositum fuit.

ἔκθ. Secundi casus. *Sint duæ minutiæ* $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{8}$, *quarum communis denominator est 8.*

Δ. Oportet $\frac{6}{8}$ *per* $\frac{3}{8}$ *diuidere.*

Κατασκ. *Diuisoris numerator alteri numeratori subscribatur, hoc modo* $\frac{6}{3}$.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* $\frac{6}{3}$ *esse quotum quæsitum. Sunt autem* $\frac{6}{3}$ *nihil aliud quàm 2 integra. De hoc casu plura in scholio.*

ἔκθ. tertij casus. *Sint duæ minutiæ* $\frac{1}{5}$. $\frac{3}{4}$ *ὡς ἔτυχε, quarum numeri se inuicem non metiuntur.*

Δ. Oportet $\frac{1}{5}$ *minutiam per* $\frac{3}{4}$ *diuidere.*

Κατασκευή. *Primum 1 multiplicans 4 producat 4, pro numeratore quoti. Secundo 5 multiplicans 3 producat 15 pro denominatore quoti. Fit igitur diuisio multiplicando numeratores & denominatores inter se decussatim.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* $\frac{4}{15}$ *esse quotum siue minutiam exeuntem ex diuisione datarum minutiarum.*

Κατ.

Κατ. demonstr. *Fiat reductio duarum minutiarum ad æquales denominatores per reductionis doctrinam. Ex duabus igitur datis minutijs, quarum dissimiles sunt denominationes, fiunt aliæ duæ* $\frac{4}{20}$, $\frac{15}{20}$, *quarum æquales sunt denominatores.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 9 axioma. *Si fuerint duæ minutiæ eiusdem denominationis, eadem erit proportio minutiarum, quæ numeratorum. Hic sunt duæ minutiæ* $\frac{4}{20}$ $\frac{15}{20}$, *eiusdem denominationis. Ergo ut se habent* $\frac{4}{20}$ *ad* $\frac{15}{20}$, *ita 4 ad 15.*

2 Syll. 11 sententia. *Quorum eadem est ratio quæ numeratorũ: eorundem est eadem diuisio. Ergo ut 4 integra diuisa per 15 faciunt* $\frac{4}{15}$: *sic minutiæ* $\frac{4}{20}$ *diuisæ per* $\frac{15}{20}$ *faciunt* $\frac{4}{15}$.

Potest verò & reductio diuidendæ minutiæ fieri ad æquipollentem: quæ per diuidentem minutiam præcisè diuidi potest: multiplicando partes diuisoris in se, & productum bis multiplicando, primùm in numeratorem diuidendæ: deinde in denominatorem eiusdem: & producta in morem fractionis scribendo: quæ per numeros diuidentis diuisa quotum patefaciunt. In dato igitur exemplo ex $\frac{1}{5}$ *fient* $\frac{12}{60}$, *æquipollentes* $\frac{1}{5}$, *eius condicionis, ut numeri diuidentis præcise numeros diuidendæ metiantur, hoc modo* $\frac{12}{60}$. $\frac{3}{4}$ ($\frac{4}{15}$. *Porro 12 prouenit ex ductu 3 in 4 (quæ alteram minutiam constituunt) Rursus 12 numerator alterius diuidendi exit ex ductu 1 in 12: ut 60 ex ductu 5 in 12. Sunt autem 1 & 5 numeri primæ minutiæ diuidendæ.*

Apodixis huius κατασκευῆς *est eadem quæ primi casus.*

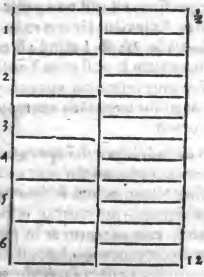
Apodixis prolixior & obscurior habetur apud alios Arithmeticos.

Eadem est ἀπόδειξις *aliorum diuisionis casuum. Minutia enim data simplex per integrum diuiditur, integro primum reducto ad fractionem simplicem, subscripta unitate: deinde ductis in se decussatim numeris: ut* $\frac{3}{7}$ *diuisis per 4 exeunt* $\frac{3}{28}$, *hoc modo* $\frac{3}{7} \times \frac{4}{1} \mid \frac{3}{28}$.

Mixta vero fractio ad simplicem reducitur, & integrum nu-

dum

8. Causa huius rei ex definitione diuisionis pendet. Cum enim diuisio nihil aliud sit, quàm inuentio, quoties diuisor diuidendum contineat, hinc apparet, eò minus singulis cedere, quo plures ad aliquam rem diuidendam fuerint: contrà tantò plus, quò pauciores. Præterea, cùm, verbi gratia, 6 per $\frac{1}{2}$ diuisis emergunt 12, hic 12 non 12 integra denotant: sed partes duodecimas: quòd $\frac{1}{2}$ duodecies in senario contineatur: id quod ex sequenti schemate euidenter apparet.



9. Examinatur diuisio per multiplicationem, ut in integris. Nam si quotus multiplicetur per diuisorem, producetur diuisus seu diuidendus: ut quia ex diuisione $\frac{5}{6}$ per $\frac{7}{8}$ producitur $\frac{40}{42}$, fit ut ex multiplicatione $\frac{40}{42}$ per $\frac{7}{8}$ producantur $\frac{280}{336}$, quæ huic $\frac{5}{6}$ æquipollent.

10. Minutiam oblatam si dimidiare velis, vel numeratoris dimidium pone, vel denominatorem duplica: ut $\frac{2}{7}$ dimidiata relinquunt $\frac{1}{7}$. Et $\frac{3}{7}$ dimidiata relinquunt $\frac{3}{14}$.

LIBER TERTIVS ARITHMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ.

DE NVMERO RESPECTIVO.

DEFINITIONES.

1. Numerus respectiuus est, qui non per se, sed respectu alterius consideratur. Respectus Græcis σχέσις est, eaque duplex, λόγος & ἀναλογία. λόγος Latinè est ratio: ἀναλογία, proportio. Boëtius autem & post eum Tonstallus, Frisius & alij quidam, utrũq; proportionem vocant: quodq; ἀναλογία propriè est, id illi nullo latinitatis exemplo proportionalitatis nomine vocant.

2. λόγος ἐστὶ δύο ἀριθμῶν ἑτέρου πρὸς ἕτερον σχέσις, id est, ratio est duorum numerorum, unius ad alterum collatio, vel habitudo: vel, ut definit Nicomachus, δύο ὅρων ἡ πρὸς ἀλλήλους σχέσις, id est, duorum terminorum mutuus respectus. Numeri enim, qui hoc modo comparantur & in proportione constituuntur, more Geometrico ὅροι, hoc est, termini: & cùm medium aliquem habent, etiam ἄκρα, hoc est, extremitates vocantur. Prior ἡγούμενος: posterior ἑπόμενος dicitur: ille antecedens, hic consequens. V. G. 2. 4. 6. 8. 10. 12. sunt sex termini proportionales, ijque Arithmeticè: hi vero tres, 8. 16. 32 Geometricè: hi denique 2. 3. 6, harmonicè: de qua distinctione infra dicetur, sub titulo de proportione.

3. Est autem ratio alia æqualis, alia inæqualis. Æqualis est, cum termini sunt æquales: ut cum 8 ad 8: 10 ad 10 referuntur: vulgo ratio æqualitatis appellatur. Hoc utitur Algebra magno cum fructu. Obtinet autem quasi medium inter inæquale maius & minus. Nam ratio inæqualis maior decre-

decreſcendo accedit ad æqualitatem : minor creſcendo. Eſtque ratio æqualis, principij inſtar. Nam omnis inæqualitas ab æqualitate procedit, & ad eandem reducitur, ut probat Brucæus.

4. Inæqualis ratio dicitur, cum termini ſunt inæquales: eſtque aut maior, aut minor.

5. Maior eſt cum terminus ſibi comparatum excedit, ut 4 ad 2. Minor eſt cùm terminus, à ſibi comparato exceditur, ut 2 ad 4. Maior πρόλογος, minor ὑπόλογος dicitur.

πρόλογος igitur eſt, cúm terminus maior antecedit, & conſideratur, quæ ſit illius ad minorem exceſſus ratio. ὑπόλογος, ſeu ὑπαρίθμος, cùm terminus minor antecedit, & quæ ſit illius à maiore diſtantiæ ratio, perpenditur: vulgo maior & minor inæqualitas.

6. Rurſus ratio inæqualis maior eſt duplex : ſimplex & compoſita. Simplex eſt πολλαπλάσιος, ἐπιμόριος, & ἐπιμερής. In tali comparatione maiores Boëtio dicuntur duces: minores vero comites : illi ſupernè : hi infernè ſcribuntur.

7. πολλαπλάσιος eſt multiplex, cum maior continet minorem præcisè : eſtq; vel dupla, vel tripla, vel quadrupla, & ſic deinceps, ut 4 ad 2, 9 ad 3, 8 ad 2.

8 ἐπιμόριος eſt ratio partis, Boëtio ſuperparticularis, cùm maior minorem ſemel continet, & aliquam eius partem : eſtq; vel ſeſquialtera, vel ſeſquitertia, vel ſeſquiquarta, & ſic deinceps: ut 3 ad 2, 4 ad 3, 5 ad 4. Seſquialtera & ſeſcupla, & Græcè ἡμιόλιος dicitur. Seſquitertia, ἐπίτριτος, Seſquiquarta, ἐπιτέταρτος, & ſic deinceps. Vt enim Græci in compoſitione addunt ἐπί: ſic Latini addunt ſeſqui.

9. ἐπιμερὴς eſt ratio partium : Boëtio ſuperpartiens, cùm maior continet minorem ſemel, & inſuper aliquot minoris particulas: eſtq; vel ſuperbipartiens, ἐπιδιμερὴς : vel ſupertri-

partiens, ἐπιτριμερὴς: vel ſuperquadripartiens, ἐπιτετραμερὴς, & ſic deinceps in infinitum: ut 5 ad 3, ſuperbipartiens tertias, vel magis germano vocabulo ſupertritertius: 7 ad 4, ſupertripartiens quartas: vel potius ſuperbiquartus: 9 ad 5, ſuperquadripartiens quintas: vel potius, ſuperquadriquintus. Nomen huius rationis inchoatur apud Latinos à præpoſitione ſuper, ſicut apud Græcos à præpoſitione ἐπὶ. Media dictio ſumitur à numeratore fractionis: poſtrema à denominatore eiuſdem fractionis.

10. Compoſita inæqualis ratio eſt duplex: una compoſita ex prima & ſecunda ſpecie: altera ex prima & tertia.

Compoſita ex prima & ſecunda ſpecie eſt multiplex ſuperparticularis: ex prima & tertia eſt multiplex ſuperpartiens.

11. Multiplex ſuperparticularis eſt, cùm maior minorem aliquoties continet, ac præterea unam minoris particulam: eſtque vel dupla ſeſquialtera: vel tripla ſeſquialtera, & ſic deinceps: vel dupla ſeſquitertia, vel tripla ſeſquitertia, & ſic deinceps in infinitum: ut ratio 5 ad 2 eſt dupla ſeſquialtera: 7 ad 2 eſt tripla ſeſquialtera: 7 ad 3 eſt dupla ſeſquitertia 10 ad 3 eſt tripla ſeſquitertia. Effertur enim nominibus ſimplicium, ex quibus conſtat. Græcis eſt λόγος πολλαπλασιεπιμόριος, id eſt, multiplex rationi partis iuncta.

12. Multiplex ſuperpartiens eſt, cùm maior minorem aliquoties continet, & inſuper aliquot minoris particulas: eſtque vel dupla ſuperbipartiens: vel dupla ſupertripartiens, & ſic deinceps: vel tripla ſuperbipartiens: vel tripla ſupertripartiens: & ſic deinceps in infinitum: ut ratio 8 ad 3 eſt dupla ſuperbipartiens tertias: 11 ad 4 dupla ſuperpartiens tres quartas: 11 ad 3, tripla, ſuperbipartiens tertias: 15 ad 4, tripla ſuperpartiens tres quartas. In his enim numeris alter al-

terum

terum totum vel bis, vel ter continet, & præterea aliquot eius partes. Græcis πολλαπλασιεπιμερής, id est, multiplex partium rationi iuncta.

13. Ratio inæqualis minor est, cùm minor confertur ad maiorem: estq; tot generum quot maior: & in ijsdem terminis versatur, sed conuersis. Qui enim antea fuit antecedens, nunc est consequens, & contrà. Effertur igitur præpositione ὑπὸ & sub, singulis eorum nominibus apposita. Sic multiplici respondet submultiplex, ὑποπολλαπλάσιος: superparticulari subsuperparticularis, ὑπεπιμόριος: superpartienti sub superpartiens: ὑπεπιμερής. Et in compositis multiplici superparticulari submultiplex superparticularis, ὑποπολλαπλασιεπιμόριος: & multiplici superpartienti, submultiplex superpartiens, ὑποπολλαπλασιεπιμερής: & in horum speciebus duplo subduplum, ὑποδιπλάσιον: sesquialteri, subsesquialtera, ὑφημιόλιος: subsesquitertia, ὑπεπίτριτος, & sic deinceps. Erit igitur 2 ad 4, submultiplex subduplus: 2 ad 3, subsesquialter: 4 ad 7 subsupertripartiens. 2 ad 5, subduplus subsesquialter.

14 Rursus ratio inæqualis alia rationalis: alia irrationalis.

Rationalis est, cuius ratio est integra. Irrationalis est ratio fracta tanquam minutia alicuius rationis integræ. Illa denominatur ab aliquo numero: estque commensurabilis, certa & cognita: Græcis ῥητὸς, quasi dicibilis: ut quadrati diametri ad quadratum costæ: quæ dupla est Hæc non denominatur ab aliquo numero: Græcis ἄρρητος: estq; communi mensura destituta, confusa & ignota, non tantum nobis, sed & naturæ, ut quibusdam placet: ut inter costam & diametrum, vel ℞. 10 ad ℞. 7. Huiusmodi quantitates incommunicantes siue incommensurabiles dicuntur.

15. Et ratio alia est numeri integri, alia fracti.

TYPVS RATIONVM.

- Ratio est vel
  - Æqualis, cum termini sunt æquales, ut 8 ad 8.
  - Inæqualis eaque vel
    - Maior siue
      - Simplex vel
        - Multiplex, eaque vel dupla, ut 4 ad 2, vel tripla, ut 6 ad 2, & sic deinceps.
        - Superparticularis, eaq; vel sesquialtera, ut 3 ad 2: aut sesquitertia, ut 4 ad 3: aut sesquiquarta ut 5 ad 4, & sic deinceps.
        - Superpartiens, eaque vel superbipartiens, ut 5 ad 3: vel supertripartiens, ut 7 ad 4: vel superquadripartiens, ut 9 ad 5, & sic deinceps,
      - Composita ex
        - Prima & secunda specie, & multiplex superparticularis, dicitur, estque aut dupla sesquialtera, ut 5 ad 2: aut tripla sesquialtera, ut 7 ad 2: aut tripla sesquitertia, ut 10 ad 3, & sic deinceps.
        - Prima & tertia, & multiplex superpartiens dicitur, eaque vel dupla superbipartiens, ut 8 ad 3: vel tripla supertripartiens, ut 11 ad 4: & sic deinceps.
    - Minor siue
      - Simplex vel
        - Submultiplex, eaque vel subdupla, ut 2 ad 4, vel tripla: ut 2 ad 6, & sic deinceps.
        - Subsuperparticularis, eaque vel subsesquialtera ut 2 ad 3, vel subsesquitertia, ut 3 ad 4, &c.
        - Subsuperpartiens, eaque vel subsuperbipartiens, ut 3 ad 5, vel subsupertripartiens, ut 4 ad 7, &c.
      - Composita ex
        - Prima & secunda specie: & submultiplex superparticularis dicitur, siue dupla, ut subdupla sesquialtera, ut 2 ad 5, &c.
        - Prima & tertia, & submultiplex superpartiens dicitur: ut 3 ad 8: & sic deinceps in ijsdem terminis, sed conuersis, apposita tantum præpositione sub.

SCHOLIVM.

1. NOTATIO. Rationem eruditi interdum non vocibus, quæ insolentes sunt, & inusitatæ purioribus scriptoribus, appellant: sed duobus numeris repræsentant. Sic Archimedes rationem peripheriæ non ducit esse triplam sesquiseptimam; sed rationem ferè 22 ad 7.

2. REDV-

2. REDVCTIO. Nulla est, ut fractio, sic & ratio, quæ non pluribus ac diuersis numeris scribi possit. Multum autem refert, ut numeri, per quos ratio aliqua designatur, inter se primi sint: Græcis πυθμενικοὶ ὅροι τῆς σχέσεως. Nam his species rationis commodius & dilucidius exprimi potest. Hic vero alia regula, quàm quæ in minutijs tradita est, opus non est. Requiritur enim communis mensura maxima, per quàm uterque terminus rationis ab initio positus diuidatur. Quoti enim, qui ex illa diuisione proueniunt, termini primi erunt: ut sint positi duo termini 27 & 36, quorum communis mensura maxima, inuenta per continuam diuisionem, nouem est: per quem utroque diuiso redduntur termini primi 3 & 4.

3. DENOMINATIO. Si nomen rationis inuenire voles, primum terminos datos reduc ad minimos: deinde maiorem diuide per minorem, id est, ducem per comitem, ut loquitur Boëtius: & quotus denominationem rationis indicat: ut sit exponenda ratio inter 63 & 21. Hic primi datorum numerorum termini minimi inueniuntur, qui sunt 1 & 3. Diuisione autem unius per tria facta exit ternarius, qui ostendit eam rationem esse triplam. Quod si vero 21 ad 63 conferatur, erit ratio subtripla. Sic ratio inter 9 & 8 est superparticularis epogdoa: ratio inter 8 & 9 est subsuperparticularis ὑπεπογδόα, subsesquioctaua. Et ratio inter 5 & 32, ratio subsexcupla superbipartiens quintas. Hic idem numerus ab Arithmeticis rationis denominator & quantitas appellatur. Sic quantitas rationis duplæ est numerus binarius: triplæ ternarius: quadruplæ quaternarius.

4. REDVCTIO denominatæ rationis ad terminos. Denominatione rationis cognita, aut aliquod extremum habemus notum, aut nullum. Data ratione inter duos numeros, & uno eorum, dabitur & alter eorum, maior per multiplicationem, minor per diuisionem noti termini per numerum, qui eam rationem denominat: ut sit data ratio dupla, cuius maior terminus notus sit 10: minor ignotus. Hunc igitur eruere volentes 10 per 2, quæ duplam denominant, secamus: unde emergunt quinque, quæ terminum minorem exhibent. Rursus sit data ratio tripla: cuius minor terminus notus sit sex: maior ignotus. Tria igitur, quæ rationem, ut sit tripla, denominant, in sex ducimus, & nascitur terminus maior, videlicet 18. Quod si denominatione rationis cognita, neutrum eius terminum habeamus notum, numeros quoscunque, qui eam rationem forment pro arbitrio apponere poterimus.

5. INÆQVALITAS. Vna ratio esse maior altera sic dignoscitur. Disponantur in suis terminis datæ rationes, sic ut antecedens utrunque

que suo consequenti superstet: factaq; multiplicatione decussatim, cuius terminis productum maius superstat, ea ratio est maior altera. Si autem fuerint producta inuicem æqualia, signum erit æqualitatis ipsarum inter se rationum: ut si quæratur, utra ratio maior sit, sesquialtera an superbipartiens tertias: sumo numeros, qui propositas rationes contineant: suntque sesquialteræ rationis numeri 3 & 2: superbipartientis verò tertias 5 & 3. Multiplicato autem 3 antecedente termino rationis sesquialteræ in 3 terminum consequentem rationis superbipartientis tertias, proueniunt 9. Rursus multiplicato alterius rationis antecedente 5, in rationis sesquialteræ consequens 2 proueniunt 10. Quoniam igitur maior est numerus super 5, quàm super 3: maior est ratio 5 ad 3, quæ est superbipartiens tertias, quàm ratio 3 ad 2, quæ est sesquialtera, hoc modo.

$$\overset{9}{\tfrac{3}{2}} \times \overset{10}{\tfrac{5}{3}}$$

Hinc sequitur, ut ratio inæqualitatis maioris excedat rationem æqualitatis; & ratio æqualitatis vincit quamcunque rationem inæqualitatis. Sic ratio $1\frac{4}{7}$ superquadrupartiens septimas maior est ratione superquintu partiente nonas, hoc modo.

$$\overset{99}{\tfrac{11}{7}} \quad \overset{98}{\tfrac{14}{9}}$$

Nam $\frac{11}{7}$ sunt $1\frac{4}{7}$: & $\frac{14}{9}$ sunt $1\frac{5}{9}$. Ratio vero inter 1 & 2, & inter 2 & 4 est æqualis, hoc modo.

$$\overset{4}{\tfrac{1}{2}} \times \overset{4}{\tfrac{2}{4}}$$

Hæ tamen rationes, quæ eandem denominationem recipiunt, propriè & similes, & eædem inter se dicuntur.

6. Rationum species numero comprehendi non possunt: eò quod quilibet terminus per unitatis additionem potest crescere in infinitum.

7. Omnes rationes, circa quas Arithmetica versatur, rationales sunt: Geometria vero rationales & irrationales considerat. Nam sæpenumero minor quantitas in continuis non est pars aut partes maioris. Omnes igitur numeri: non vero omnes magnitudines sunt communicantes.

8. Ratio minutiarum inter se eodem modo, quo numerorum integrorum, inuestigatur. Vna enim minutia per alteram diuiditur: ut ratio inter $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$ est ea, quæ 21 ad 20, hoc est, sesquivigesima, hoc modo. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \mid \frac{21}{20}$,

Sic

Sic ratio $7\frac{2}{3}$ ad $3\frac{1}{2}$ est $2\frac{4}{21}$, id est, dupla super quadrupartiens vigesimas primas: qualis est inter 46 & 21. Contra, ratio $3\frac{1}{2}$ ad $7\frac{2}{3}$ est subdupla superquadrupartiens vigesimas primas.

9. SVPPVTATIO est additio, subtractio, multiplicatio, diuisio: eaque dispar supputationi in numeris simplicibus. Adduntur autem, subtrahuntur, multiplicantur & diuiduntur rationes, sed eiusdem speciei, hoc est, vel maioris inæqualitatis inter se: vel minoris inter se. Neque enim mistionem legitimè recipiunt. Hæc supputatio in propositionibus, quæ sequuntur docetur.

ADDITIO.

προτασις. Duas datas rationes addere.

ἐκθ. *Sint duæ rationes, 1 ad 2, & 3 ad 9.*

Δ. Oportet *rationem 1 ad 2 addere rationi 3 ad 9.*

Κατασ. *Dispono datarum rationum terminos 1 ad 2 & 3 ad 9 more fractionum: & multiplicans 1 in 3 & 2 in 9 fiunt duo numeri 3 & 18, hoc modo.*

$\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{18}$ *siue* $\frac{1}{6}$.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico quòd ratio 3 ad 18 composita sit ex rationibus datis 1 ad 2, & 3 ad 9.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 5 axioma. *lib.* 2. *Si numerus multiplicauerit duos numeros, procreati inde habebunt cum multiplicatis rationem eandem. Hic unum duos 3 & 9 multiplicans producat 3 & 9. Ergo ut 3 ad 9, sic 3 ad 9. Est enim hic identitas.*

2 Syll. Idem ax. *Si numerus &c.*

Hic 9 duos numeros 1 & 2 multiplicans 9 & 18 producat. Ergo sicut 9 ad 18, ita 1 ad 2.

$\frac{1}{2}$ ✕ $\frac{3}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{9}{18}$.

3 Syll. prop. 5. lib. 8. *Si fuerint tres numeri, ratio primi ad tertium componitur ex ratione primi ad secundum: & secundi ad tertium. Hic sunt tres numeri 18, 9, 3. Ergo ratio 18 ad 3 componitur*

nitur ex ratione 18 ad 9, id est, duorum ad 1. per secundum syllogismum: & 9 ad 3 per primum syllogismum.

συμπέρασμα. Duae igitur datae rationes inter se additae sunt, quod fecisse oportuit,

σχόλιον.

1. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates in seipsas multiplicatae fecerint aliquas. Euclides ad principia lib. 6. Additio igitur rationum à multiplicatione minutiarum vulgarium non differt.

2. Quod si plures quàm duae rationes componi debeant: utpote tres siue quatuor: ex duabus primùm fit una: cui & tertia: deinde & producto quarta iungitur more praedicto. Vt sint quatuor rationes, quarum hi sint termini, 6, 5, 4, 3, 1. Prima est sesquiquinta: secunda sesquiquarta: tertia sesquitertia: quarta tripla. Ex quatuor his rationibus sexcupla componitur hoc modo.

$\frac{6}{5}\ \frac{5}{4} \mid \frac{30}{20} \mid \frac{4}{3} \mid \frac{120}{60} \mid \frac{3}{1} \mid \frac{360}{60}$.

3. Compendium additionis plurium rationum cognosci potest ex sequenti doctrina. Sunt enim numeri vel proportionales, vel improportionales.

In continuè proportionalibus sic Euclides docet. Si fuerint tres quantitates continuè proportionales: ratio primae ad tertiam dicitur ratio primae ad secundam duplicata: hoc est, si fuerit ratio primi ad secundum, sicut secundi ad tertium: tunc ratio primi ad tertium erit, sicut primi ad secundum duplicata, id est, ex duabus talibus composita: ut sint tres numeri continuè proportionales, dupli, nempe 8, 4, 2. In his ratio inter primum & tertium quadrupla est: itaq; dupla rationis, quae est inter primum & secundum, id est, constans ex duabus duplis. Nam 2 in 8 quater continetur: & 4 in 8, bis.

4. Si fuerint quatuor quantitates continuae proportionales, ratio primae ad quartam dicetur ratio primae ad secundam triplicata, hoc est, prius in se, postea in productum multiplicata: ut sint quatuor numeri tripli continuè proportionales, veluti 27, 9, 3, 1. In his ratio inter primum & quartum est viginti septupla: quae est tripla rationis inter primum & secundum, quae & ipsa tripla est. Ratio igitur inter 27 & 1 est composita ex tribus triplis.

5. Similiter si quinque termini continuè proportionales fuerint: ratio extremorum complectetur rationem primorum quater: si sex fuerint, quinquies eam capiet: si septem, sexies: & ita deinceps, ut semper ratio extremorum toties contineat rationem primorum,

quot

quot sunt omnes termini demto uno. Et sic in proportione continua ratio extremorum ex omnibus rationibus medijs seu intermediorum producitur, quod axioma celeberrimum est: ex quo tanquam fonte riuulus emanauit 10 definitio quinti: & 11 & 12 octaui. Tonstall. lib. 4.

6. Eadem est doctrina in terminis improportionalibus longa serie continuatis. Nam & in his ratio semper inter primum & ultimū ex omnibus collecta est: ut sint hi quatuor numeri 24, 6, 2, 1. Inter quatuor hos numeros tres sunt rationes, quarum prima inter 2 & 1 est dupla: secunda inter 6 & 2 est tripla: tertia inter 24 & 6 est quadrupla. Sunt itaque termini improportionales. Iam ratio inter 24 & 1 est viginti quadrupla, eaque composita ex dupla, tripla, & quadrupla. Nam primæ duæ rationes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ collectæ faciunt $\frac{1}{6}$, id est, rationem sexcuplam: deinde $\frac{1}{6}$ & $\frac{6}{24}$ collectæ faciunt $\frac{6}{144}$, siue $\frac{1}{24}$, id est, rationem viginti quadruplam.

Si igitur propositum sit, verbi gratia, de componendis quatuor rationibus, sesquiquinta, sesquiquarta, sesquitertia, tripla, continuentur ipsæ rationes in suis terminis: scilicet ut singularum comites, ultimo demto sint etiam duces: ut in hunc modum, 6, 5, 4, 3, 1. In hac igitur serie ratio primi numeri ad ultimum sine multiplicatione monstrabit, quænam sit omnium inter se ratio composita, nimirū sexcupla, ut supra inuenta est. Nam inter 6 & 1 ratio sexcupla est.

7. Additionem probat subtractio, de qua iam dicendum est. Subtracta enim una parte à toto, relinquitur altera: ut in primo exemplo $\frac{1}{2}$ subtracta ab $\frac{1}{6}$, relinquit $\frac{1}{3}$, partem alteram. Probat & medium proportionale. Nam si illud collocatum inter duos terminos inuentos duas faciat rationes, quales ante erant propositæ, indicium est rectæ operationis. V.G $\frac{3}{18}$ sunt summa duarum rationū, subduplæ & subtriplæ. Nam 9 collocatum inter 3 & 18 duos facit terminos, qui duas datas rationes constituunt hoc modo.

3. ——— 9. ——— 18
3 2

SVBTRACTIO.

πρότασις. Datis duabus rationibus inæqualibus à maiore minorem subtrahere.

ἐκθ. Sint duæ rationes datæ: maior quidem 3 ad 2: minor vero 4 ad 3.

Δ Oportet *à maiore ratione 3 ad 2; minorem 4 ad 3 auferre.*

Κατ *Primò 3 multiplicans 3 procreet 9. Secundò 2 multiplicans 4 procreet 8. Tertiò 3 multiplicans 4 efficiat 12, hoc modo.*

$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} | \frac{9}{8}$ 12.

Repetitio τῦ διορ. *Dico, quod ratio 9 ad 8 relinquitur subtracta minore 4 ad 3 à maiore 3 ad 2.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 5 axioma lib 2. *Si numerus multiplicauerit duos numeros &c. Hic 4 multiplicans 3 & 2 procreet 12 & 8. Est igitur 12 ad 8, sicut 3 ad 2.*

2 Syll. Idem axioma. *Si numerus multiplicauerit &c. Hic tria multiplicans 4 & 3 procreet 12 & 9. Ergo ut 12 ad 9, ita 4 ad 3.*

3 Syll. prop. 5. lib. 8. *Ratio primi & ultimi composita est ex intermedijs rationibus. Hic sunt tres termini improportionales, 12, 9, 8. Ergo ratio 12 ad 8, hoc est, 3 ad 2 componitur ex 12 ad 9, hoc est, 4 ad 3: & ex ratione 9 ad 8, hoc modo, 12, 9, 8.*

4 Syll. sententia subtr. *Dato toto & eius partibus, si una pars subtrahatur, relinquitur altera.*

Hic est totum, nempe ratio 3 ad 2: & duæ partes, nempe ratio 4 ad 3, & ratio 9 ad 8. Ergo subtracta ratione 4 ad 3 à ratione 3 ad 2, relinquitur ratio 9 ad 8, quod fecisse oportuit.

σχόλιον.

1. Subtrahere rationes est diuidere terminum unius rationis per terminum alterius rationis; quod fit multiplicatione decussatim. Est igitur nihil aliud quàm diuisio fractorum.

2. Quod si ex terminis rationum fiant minutiæ eiusdem denominationis, subtractio fit, ut diuisio in integris: ut si tollatur ratio $\frac{2}{1}$ à ratione $\frac{5}{1}$ restant $\frac{5}{1}$, id est, ratio quintupla. Nam 1 in quinque quinquies: & 2 in 2 semel habetur.

3. Nihil refert, uter ex duobus terminis, prius an posterius scribatur: sed si in maiori inæqualitate fiat subtractio, intelligi debet secundum rei naturam, maior terminus præcedere, & in opposita specie minor.

4. In subtractione ratio maior à minori subtrahi non potest, non magis

magis, quàm in numeris is, qui fit maior ex minore. Quod si subtrahenda ratio sit maior ea, à qua facta sit subtractio, tunc genus mutatur; ut si ratio 5 ad 3 subtrahatur à ratione 3 ad 2, residua est ratio 9 ad 10, ratio scilicet minoris inæqualitatis: eò quod ratio 5 ad 3 maior est ratione 3 ad 2.

5. Subtractionem probat additio. Totum enim est æquale suis partibus: ut in primo exemplo $\frac{4}{3}$, velut una pars subtracta à toto, nempe $\frac{3}{2}$, relinquit partem alteram, nempe $\frac{9}{8}$. Ergo, quia recta fuit operatio, $\frac{4}{3}$ & $\frac{9}{8}$ additæ inuicem constituunt $\frac{36}{24}$, id est, $\frac{3}{2}$.

6. Est & hic subtrahendi modus. Vtriusque rationis quantitatem quæras. Nam illæ duæ quantitates sunt ratio residua: ut ratio 2 ad 1 est auferenda à ratione 4 ad 1. Quantitas illius est 2: huius 4. Dico igitur rationem residuam esse 4 ad 2, siue 2 ad 1. Erit igitur ratio quadrupla composita ex duabus duplis.

7. Quod si quantitates numeris fractis non integris exprimantur, eas ad eandem denominationem reuocare oportet. Nam reductarum numeratores erunt pro residuæ rationis terminis: ut ratio 3 ad 4, si sit auferenda à ratione 1 ad 2, prioris quantitas est $\frac{1}{2}$: posterioris $\frac{3}{4}$, quibus ad eandem denominationem reductis fiunt $\frac{4}{8}$ & $\frac{6}{8}$. Erit igitur ratio residua 4 ad 6.

MVLTIPLICATIO.

πρότασις. Datam rationem multiplicare.

Duo sunt casus. Rationum enim multiplicatio fit vel per numeros integros, vel per fractos. Per numeros integros multiplicatio non est alia, quàm earundem additio seu continuatio: estq́; vel duplicatio vel triplicatio, vel quocunq; alio modo multiplicatio.

ἔκθ. primi casus. *Sit data ratio 3 ad 2, ut linea c ad lineam e.*

Δ. Oportet *datam rationem 3 ad 2 quadruplicare.*

Κατ. *primum c tria multiplicetur cubicè & producat d, 27. Deinde e, 2 multiplicetur cubicè & producat 6, 8. Tertio c cum d multiplicetur, & proueniat 9, 81, censicus censicus. Et e cum b multiplicetur, & detur p, alter censicus censicus, nempe 16, hoc modo*

$\frac{3}{2} \mid \frac{27}{8} \mid \frac{81}{16}$

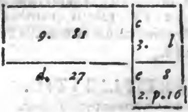
Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico ratio facta 9, 81 ad p, 16 esse quadruplam rationi c ad e, id est, 3 ad 2.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 24 sexti aut quinta octaui. *Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Hic sunt duo numeri plani 81 & 16, siue q. & p. Ergo ratio 81 ad 16 siue q ad p est composita ex rationibus laterum, nimirum d ad b & c ad e, siue 27 ad 8, & 3 ad 2.*

2 Syll. 11. octaui. *Cubus habet triplam rationem suorum laterum. Ergo ratio duorum cuborum 27 ad 8 est tripla rationis 3 ad 2.*

3 Syll. sententia. *Dato toto & duabus partibus, si una pars est tripla alterius partis, totum est quadruplum eiusdem partis, ut in istis numeris 4,3,1. Hic datur totum, nempe ratio 81 ad 16: & una pars nempe 27/8 est tripla alterius partis, nempe 3/2. Ergo totum est quadruplum eiusdem partis: quod demonstrasse oportuit.*



ἔκθ. Secundi casus. *Sit ratio 5 ad 4, qua est sesquiquarta.*

Δ. Oportet *rationem datam 5 ad 4 multiplicare per 2/3.*

Κατασκ. *Multiplicatio per numeros fractos fit hoc modo. Primo eiusdem rationis terminos toties pone, quot sunt numeratoris multiplicantis unitates: deinde ducibus & comitibus inter se multiplicatis productum diuide per denominatorem: vel ex producto radicem eam extrahe, quam partium denominator indicat. Indicat autem binarius quadratam, ternarius cubicam: quaternarius quadratam quadratæ, atq; ita deinceps. In dato igitur exemplo, primum quidem positis 5 & 4 bis hoc modo. 5/4 5/4. duces inter se multiplico, & habeo 25: deinde eodem modo & comites, & efficio 16: quæ producta vel diuido per 3 denominatorem: vel ex illis*

radices

radices cubicas (id enim ternarius denominator postulat) extraho, & prodit ratio radicis cubicæ 25 ad radicem cubicam 16, vel ut ratio 25 ad radicem cubicam 10'000: quæ quidem rationes æquales inuicem sunt: cum tam una quàm altera sit pars tertia totius. Hæc vero sequentium regularum de diuisione & inuentione mediorum proportionalium doctrinam requirunt, de quibus paulo post dicetur.

Ἀπόδειξις.

Definitio. *Multiplicare rationem per fractos est quærere aliam rationem, ad quam data se habeat, ut denominator se habet ad numeratorem. Hic datur ratio sesquiquarta, qualis est inter 5 & 4. Ergo ratio primum multiplicatur per numeratorem: deinde productum per denominatorem diuiditur, hoc modo. 3. d, 2. q. $\frac{5}{4}$ d. 25. ad √ 10'000. quod demonstrasse oportuit.*

σχόλιον.

1. Duplicata ratio fit, cum ex terminis datarum rationum procreatur numerus quadratus: ut si rationem sesquitertiam, quæ est 8 ad 6 duplicare quis velit, quia eiusdem minimi numeri sunt 4 & 3. uterque terminus semel in se ducatur: & prodibunt 16 & 9, inter quæ ratio est $1\frac{7}{9}$, id est, superpartiens septem nonas, dupla datæ rationis.

3. Triplicata ratio fit cum ex terminis datarum rationum procreantur numeri cubici: ut ex triplicatione $1\frac{1}{2}$, id est, sesquialteræ rationis emergunt $\frac{27}{8}$, seu $3\frac{3}{8}$, id est, tripla superpartiens tres octauas, tripla datæ rationis.

Sic quadruplicata ratio fit, cum ex terminis datarum rationum procreantur numeri zensizensici, & sic in infinitum.

4. Ratio duplicationis pendet ex 18 sexti, vel 11 octaui, ubi Euclides ait. Ratio quadrati ad quadratum dupla est rationi suarum radicum. Ratio triplicationis pendet ex 36 undecimi, vel 11 octaui, ubi Euclides ait. Cubi ad cubum tripla est rationi suarum radicum. Sic ratio zensizensici ad radicum rationem quadrupla: primi relati ad primum relatum quintupla, & sic gradatim.

5. Alia ratio multiplicationis per numeros integros petitur ex rationum similitudine, quæ in tribus terminis minima est.

Cum tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium habet rationem duplam rationis primi ad secundum.

Cum

Cum quatuor fuerint termini continuè proportionales, erit ratio primi ad quartum tripla primi ad secundum.

Si quinq; fuerint termini, erit extremorum ratio quadrupla: si sex, quintupla: atque ita de cæteris: ut docet Euclides ad principia quinti Elem.

6. Quicunque igitur rationem aliquam multiplicare velit, is si duplare velit rationem propositam, constituet tres numeros continuè proportionales in illa ratione: si triplare quatuor: si quadruplare, quinque: si octuplare, nouem: atque ita de reliquis. Extremi enim numeri, proportionem multiplicem rationis propositæ indicant: ut si velim scire quadruplum rationis sesquialteræ: sumo quinque terminos in ratione sesquialtera continuè proportionales: suntque hi. 81, 54, 36, 24, 16. Iam cum extremi 81 & 16 seruent rationem quintuplam sesquidecimam sextam: inde pronuncio eandem esse quadruplam sesquialteræ.

7. Pars rationis multiplicatæ per numeros fractos aliàs est rationalis, aliàs irrationalis. Vtcunque res se habeat, unà eademque via ratio quæuis constituitur: ut ratione 9 ad 4 ducta in rationem 3 ad 2, emergit ratio 27 ad octo, id est, tripla supertripartiens octauas. Terminos enim sic dispono. 3. d. 2. q. $\frac{9}{4}$. Iam 2 ducta in $\frac{9}{4}$ faciunt $\frac{729}{64}$, ex quibus radix quadrata extracta facit $\frac{27}{8}$, cuius ratio est tripla supertripartiens octauas. Sic ratio dupla ducta in rationem sesquialteram facit rationem radicis quadratæ 8 ad 1.

8. Multiplicatio per sequentem diuisionem probatur: ut diuisio per multiplicationem.

DIVISIO.

πρότασις. Datam rationem in tot partes, quot quis proponat, diuidere.

Tres sunt casus. Diuiditur enim ratio vel per integrum, vel per numeros fractos, vel per aliam rationem.

Ἐκθ. primi casus. *Sit data ratio 729 ad 64.*

Διορ. Oportet *datam rationem bifariam partiri.*

Κατασκευή. *Si ratio per binarium diuidenda veniat, extrahe de utroq; termino rationis radicem quadratam, & prouenient $\frac{27}{8}$.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico rationem 27 ad 8 esse rationem quæsitam, quæ rationem 729 ad 64 bifariam diuidit.*

Κατ.

Κατ. demonſtrat. 1. *inueniatur medium proportionale inter 729 & 64 per ea, quæ infra docebuntur. In dato exemplo medium proportionale inter 729 & 64 eſt 216. Productum enim ex multiplicatione duorum extremorum in ſe eſt 46656, cuius radix quadrata eſt 216.*

2. Diuidantur 729 per 216, & exibunt $3\frac{3}{8}$, denominatio rationis 729 ad 216.

3. Diuidantur 216 per 64, & exibunt $3\frac{3}{8}$, denominatio rationis 216 ad 64.

4. Diuidantur 729 per 64, & exibunt $11\frac{25}{64}$, denominatio rationis 729 ad 64.

5. Ducantur $3\frac{3}{8}$ in $3\frac{3}{8}$, & prouenient $\frac{729}{64}$, cuius denominatio eſt $11\frac{25}{64}$.

Repetitio τȣ̃ διοϱισμȣ̃. *Dico rationem 729 ad 64 eſſe $11\frac{25}{64}$, æqualem geminatæ rationi $3\frac{3}{8}$, hoc eſt, triplæ ſupertripartienti octauas, cuius termini ſunt 27 & 8.*

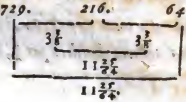
Ἀπόδειξις.

Sententia. *Quocunq; duobus interpoſitis medio, cuius ad utrunq; ſit aliqua ratio: erit primi ad tertium compoſita ex ratione primi ad ſecundum, & ratione ſecundi ad tertium.*

Inter 729 & 64 datur medium 216. Ergo ratio inter 729 & 64 conſtat ex ratione 729 ad 216, & ratione 216 ad 64. Eſt autem eadem cum 27 ad 8, quæ duplicata facit $11\frac{25}{64}$, rationem ſcilicet duorum extremorum.

συμπέρ. *Data igitur ratio inter duos numeros diuiſa eſt bifariam, quod feciſſe oportuit.*

Schema ſupputationis.



Est autem regula generalis hæc. Si ratio per numerum integrum diuidenda veniat, extrahe de utroq; termino radicis radicem illam, quam diuisor indicat. Nam si binarius fuerit, ut in præcedenti casu, utriusq; numeri radicem quadratam: si ternarius cubicam: si quaternarius, quadratæ radicis quadratam: si quinarius radicem surſolidam: sicq; ordine deinceps inuenire oportet. Sic $\frac{729}{64}$ *diuisa per 3 facit* $\frac{9}{4}$*: per sex, facit* $\frac{3}{2}$*. Item* $\frac{243}{32}$ *diuisa per 5 facit* $\frac{3}{2}$*. Et* $\frac{256}{81}$ *diuisa per 4 facit* $\frac{4}{3}$*. Item* $\frac{2187}{128}$ *diuisa per 7 facit* $\frac{3}{2}$*, & sic de aliis. Eadem est ἀπόδειξις pluribus quàm duobus interpositis mediis: ut si inter 162 & 32 cadunt tres medii, 108, 72, 48, hoc modo 162, 108, 72, 48, 32. Nam 162 ad 32 componitur ex 162 ad 108 & 108 ad 32: sed 108 ad 32 componitur ex 108 & 72: & 72 ad 32: 72 autem ad 32 ex 72 ad 48, & 48 ad 32, & sic deinceps. Eadem vero ἀπόδειξις est & sequentium casuum.*

ἐκθ. secundi casus. *Sit data ratio 27 ad 8.*

Δ. Oportet *datam rationem per* $\frac{3}{4}$ *diuidere.*

Κατ. *Si ratio per minutias diuidenda erit, permuta terminos diuisoris, hoc est, numeratorem in denominatorem muta, & multiplica terminos secundum regulam supra traditam. Propositum igitur exemplum stat ad regulam sic.* $\frac{27}{8}$ $\frac{4}{3}$*. Iam positis terminis quater hoc modo* $\frac{27}{8}$ $\frac{27}{8}$ $\frac{27}{8}$ $\frac{27}{8}$*: deinde multiplicatis inter se & ducibus & comitibus, proueniunt hi termini* $\frac{531441}{4096}$*. Ex quibus radices cubicæ (ut indicat denominator ternarius) sunt 81 & 16: quæ rationem constituunt quintuplam superaddentem decimam sextã: quæ ex tripla superpartiente tres octauas per* $\frac{3}{4}$ *diuisa relinquitur. Ratio igitur diuidendi datam rationem per minutias cum modo diuidendi integrum per minutias conuenit.*

ἐκθ. tertii casus. *Sit ratio inter 729 & 64.*

Δ. Oportet *datam rationem diuidere per* $\frac{3}{2}$*, hoc est, rationem sesquialteram.*

Κατ.

Κατασκευὴ. *Subtrahantur $\frac{3}{2}$ à $\frac{729}{64}$, quoties licet (licet autem sexies) donec termini iidem siue æquales relinquantur, hoc modo.*

1.	$\frac{729}{64} \times \frac{3}{2}$	|	$\frac{1458}{192}$ siue $\frac{243}{32}$
2.	$\frac{243}{32} \times \frac{3}{2}$	|	$\frac{486}{96}$ siue $\frac{81}{16}$
3.	$\frac{81}{16} \times \frac{3}{2}$	|	$\frac{162}{48}$ siue $\frac{27}{8}$
4.	$\frac{27}{8} \times \frac{3}{2}$	|	$\frac{54}{24}$ siue $\frac{9}{4}$
5.	$\frac{9}{4} \times \frac{3}{2}$	|	$\frac{18}{12}$ siue $\frac{3}{2}$
6.	$\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$	|	$\frac{6}{6}$ Hic est æqualitas.

Ratio igitur sesquialtera in 729 ad 64 comparatis sexies continetur.

Rursus diuidatur ratio, quæ est inter 2187 & 128 per eam, quæ est inter 27 & 8. Subtractis igitur $\frac{27}{8}$ à $\frac{2187}{128}$ bis, relinquuntur 648 ad 432, siue in primis terminis 3 ad 2, hoc modo.

1.	$\frac{2187}{128} \times \frac{27}{8}$	|	$\frac{17496}{3456}$. seu $\frac{81}{16}$.
2.	$\frac{81}{16} \times \frac{27}{8}$	|	$\frac{648}{432}$. seu $\frac{3}{2}$.
3.	$\frac{3}{2} \times \frac{27}{8}$	|	$\frac{24}{54}$. seu $\frac{4}{9}$.

Hic quia prodit ratio minoris inæqualitatis, genus est mutatum: unde tertia subtractio fieri non debuit. Cùm autem duæ subtractiones factæ sint, ideo quotus est 2: cumque remaneant $\frac{1}{3}$, hoc residuum est tertia pars diuidentis, & totus quotus $2\frac{1}{3}$. Est igitur ratio dupla sesquitertia inter $\frac{2187}{128}$ & $\frac{27}{8}$. Hæc ex Stifelio.

σχόλιον.

1. Quarum rationum termini non admittunt numerum medium in continua ratione, hæ rationes diuidi non possunt in duas aut plures æquales rationes, quæ numeris explicari possint: ut cùm termini rationis $1\frac{1}{2}$ sint 3 & 2: & fieri non possit, ut aliquis numerus cadat medio loco proportionalis inter 3 & 2, hinc istam rationem diuidi non posse dicimus. Ità se habent omnes rationes superparticulares,

2. Omnis ratio unius vel plurium interpositione continuata ter-

 minorum

terminorum non continuè proportionalium: totidem quot & in analogia diuisiones, sed non per æqualia capit: ut sit ratio inter 12 & 2, inter quos ponatur 5, hoc modo, 12, 5, 2. Dico rationem illam sexcuplam in duas, quæ sunt dupla superbipartiens quintas, & dupla sesquialtera rationes: sed inæqualiter esse diuisam. Ratio enim 12 ad 5 est minor, quàm 5 ad 2.

3. Diuisio rationum & multiplicationi & additioni contraria est. Vt enim additio docet plures rationes componere: ita diuisio diuidendam rationem, quæ instar summæ se habet, docet in tot rationes secare, quot interualla inter eius extrema ex interpositione terminorum mediorum oriuntur.

4. Diuisio per contrariam multiplicationem probatur: ut ratio sesquialtera in 729 ad 64 relatis sexies continetur: quia sesquialtera per sex multiplicata facit rationem undecuplam superpartientem 25 sexagesimas quartas: qualis est inter 729 & 64. Sic ratio inter 27 & 8 in ratione 2187 ad 128 bis habetur cum tertia eiusdem rationis parte: quia $\frac{27}{8}$ bis positæ & cum $\frac{3}{2}$ coniunctæ faciunt rationem 2187 ad 128 terminos ab initio propositos.

DE PROPORTIONE.

DEFINITIONES.

1. Proportio, Græcis ἀναλογία: alijs proportionalitas, Euclidi est λόγων ὁμοιότης, rationum similitudo: Aristoteli τῶν λόγων ἰσότης, rationum æqualitas: alijs τῶν λόγων ταυτότης, rationum identitas: anonymo λόγων λόγος, rationum ratio.

2. A proportione dicuntur numeri proportionales & improportionales. Proportionales, ἀνάλογοι, sunt quorum ratio est similis, siue æqualis siue eadem. Heroni sic. Proportionales numeri sunt, quorum primus secundi: & tertius quarti æqualiter fuerit multiplex, vel eadem pars, vel eadẽ partes. Continentur enim quatuor ad minimum terminis. Nam quanquam re interdum tres tantum sunt termini: semper tamen aut re aut ratione plures sunt. Vnus enim ex tribus illis bis sumitur.

Improportionales sunt, inter quos rationum dissimilitudo cadit.

3. Pro-

3. Proportio triplex eſt, alia harmonica, alia Arithmetica, alia Geometrica.

4 Proportio harmonica eſt, in qua tribus numeris poſitis, ſicut ſe habet maximus ad minimum: ſic ſe habet differentia maximi & medij ad differentiam medij & minimi: ut 6, 4. 3. Sex diſtant à 4 binario: 4 diſtant à tribus unitate. Vt autem dupla ratio eſt 6 ad 3: ſic dupla 2 ad 1.

5. Harmonica dicitur, quòd in harmonijs conſpicitur: quarum quinque ſunt genera: ſeſquialtera, ſeſquitertia, dupla, tripla, quadrupla.

Seſquialtera eſt, in qua maximus terminus cum medio confertur, id eſt, ſenarius cum quaternario. Muſici diapente vocant.

Seſquitertia eſt, in qua medius terminus cum minimo confertur, id eſt, quatuor cum ternario. Muſici diateſſaron vocant.

Dupla eſt, in qua conferuntur inter ſe differentiæ primi & medij termini: & differentia medij & ultimi: ut duo cum unitate. Hanc Muſici diapaſon vocant.

Tripla eſt, in qua confertur maximus terminus cum differentia maximi & medij, ut ſex cum duobus. Muſici conjunctam ex diapaſon & diapente vocant.

Quadrupla eſt, cùm confertur medius terminus ad differentiam medij & minimi, id eſt, quatuor ad unum. Muſici δὶς διὰ πασῶν vocant.

6. Harmonicæ oppoſita eſt contraharmonica, in qua tribus numeris poſitis ratio prioris differentiæ ad differentiam poſteriorem eadem eſt cum ratione maioris extremi ad minus extremum: ut 3, 5, 6 contraharmonica dicitur, quia fit ex harmonica commutatis differentijs, hoc modo,

3, [1] 4, [2] 6, | 3. [2] 5, [1] 6.

7. Proportio Arithmetica est, cum tribus aut pluribus numeris dispositis, seruatur differentiarum æqualitas: ut 3, 5, 7, 9. Hi numeri singuli distant binario.

8. Est autem duplex: continua & disiuncta. Continua est, quæ terminis cohæret, ut quilibet tùm antecedentis, tum consequentis munere fungi possit. Sic non solum proportio, quæ est inter 3. 2. 1. continua dicenda est: ubi 2 antecedentis rationis est consequens: & sequentis antecedens: sed ista quoque 5, 7, 9, 11, ubi differentia eadem à primo in postremum continuata est: & quilibet ex 7 & 9 intermedijs proximè antecedentium consequens: & sequentium antecedens appellari potest.

Disiuncta est, quæ terminis disiungitur, ut primus saltem ad secundum, eundem respectum habeat, quem tertius ad quartum: secundus vero cum tertio nequaquam: ut 10. 8. 4. 2. Hic enim differentia 2, inter 8 & 4 non continuatur.

9. Rursus continua proportio aut simplex, aut multiplex est. Simplex est, in qua extremorum unum tantum est medium: ut 1. 2. 3 vel 1. 4. 8. vel 2. 5. 8. Multiplex est, in qua plures medij termini continuè progrediuntur: unde progressio Arithmetica dicitur: ut 1. 5. 9. 13. 17.

10. Proportio Geometrica est, cum tribus aut pluribus numeris dispositis, non numerorum differentia consideratur, sed rationum æqualitas: ut 9. 3, 12, 4. Hic binorum numerorum 9 & 3: sic 12 & 4, tripla ratio est. Geometrica dicta est, quòd illam magnitudines Geometricæ perspicuè referant. Hinc numeri, quorum ratio est similis, proportionales vocantur: quorum dissimilis, improportionales.

11. Est autem duplex, continua & disiuncta. Continua est, in qua omnes termini præter extremos antecedentis & consequentis munere funguntur: ut in istis 1, 2, 4, 8. Vt enim 1

ad 2:

ad 2: sic 2 ad 4, & 4 ad 8. Continua appellatur, quod terminos continuos seu communes habeat. Græcis συνεχὴς & συνημμένη: Latinis etiam coniuncta.

12. Rursus coniuncta duplex est, alia simplex, alia multiplex. Simplex constat tribus terminis. Multiplex, pluribus terminis & longius continuatis.

13. Disiuncta est, in qua omittitur interuallum aliquod: ut si dicamus esse ut 2 ad 4: sic 5 ad 10, non 4 ad 5. Disiuncta dicitur, quod communem terminum non habeat, ad quem rationes cohæreant. Græcis est διεχὴς, & διῃρημένη: Latinis etiam discontinua & contigua.

14. Rursus disiuncta duplex: alia simplex, alia multiplex. Simplex est, quæ constat terminis quatuor, estque regula aurea. Multiplex, quæ constat pluribus terminis, ut regula plurium numerorum, regula societatis, & de intercapedine temporis diuersi in consortio.

15. Rursus simplex alia directa est, alia reciproca. Directa est, in qua ut primus terminus est ad secundum, ita tertius ad quartum.

Reciproca est, in qua sicut se tertius terminus habet ad secundum: ita reciprocè se habet primus ad quartum.

16. In vestibulo libri quinti Euclides sex formas argumētandi ex proportionibus recenset, quarum nomina sunt hæc, ἐναλλὰξ, ἀνάπαλιν, σύνθεσις, διαίρεσις, ἀναστροφὴ, & δἰ ἴσου.

1. ἐναλλὰξ est ratio vicissitudinis, Latinè alterna, vulgo permutata, quæ directam proportionem permutat. Si enim fuerit ratio primi ad secundum, ut tertij ad quartum, siue Arithmetica, siue Geometrica: erit permutata ratio primi ad tertium, sicut secundi ad quartum. Hic confertur antecedens cum antecedente: & consequens cum consequente: ut si directè 6 ad 4, sicut 15 ad 10: igitur permutatim 6 ad 15, ut 4 ad 10.

6. 4. 15. 10.



Nicomas

Nicomachus ἀνάμιξ vocat, in quo est mistionis significatio. Demonstratur γραμμικῶς quidem in lib. 5. prop. 16. In numeris vero prop. 13. lib. 7.

Idem fit in Arithmetica proportione, ut apparet in istis numeris.

2 2

8. 6. 12. 10.

4.

4.

Ἀνάπαλιν est ratio conuersionis, vulgo econuerso, quæ terminos inuertit. Si enim fuerit ratio primi ad secundum: ut tertij ad quartum: tum conuersim erit secundi ad primum, ut quarti ad tertium: ut si 6 ad 4, velut 15 ad 10, erit etiam 10 ad 15, ut 4 ad 6. Et similiter in Arithmetica. Demonstratur γραμμικῶς lib. 5. p. 4.

3. σύνθεσις est rationis compositio, quæ terminos componit. Si enim fuerit ratio primi ad secundum: ut tertij ad quartum: erit etiam coniunctim eadem ratio primi & secundi ad secundum: ut tertij & quarti ad quartum: ut si 6 ad 4: ut 15 ad 10: erit & 6 & 4 qui faciunt 10 ad 4, sicuti 15 & 10, qui faciunt 25 ad 10. Et similiter ἀνάπαλιν & coniunctim, 6 & 4 ad 6, veluti 15 & 10 ad 15. Vtraque enim ratio est dupla sesquialtera, ut $2\frac{1}{2}$, hoc modo.

10. 4 25. 10.
6. 4 15. 10.

Demonstratur lib. 5. prop. 18.

4. διαίρεσις est diuisio rationis, quæ terminos diuidit. Si enim fuerit ratio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum: erit & diuisim residuum primi & secundi ad secundum, sicut residuum tertij & quarti ad quartum: ut si 6 ad 4, velut 15 ad 10: igitur 6 ad 2, quod est residuum de 4, sicut 15 ad 5, quod est residuum de 10, hoc modo.

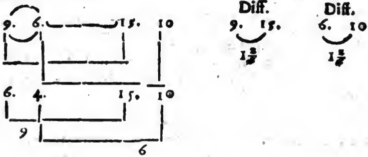
2 5

2. 4 5. 10
6. 4 15. 10

Residua sunt sic. 6. 15
4. 10
2. 5.

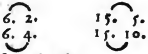
Et

Et ἐναλλὰξ ut differentia 6 & 15, id est, 9 ad 15: sic differentia 4 & 10, id est, 6 ad 10.

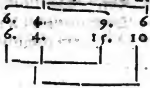


Demonstratur lib. 5. prop. 17.

5. Ἀναστροφὴ est inuersio rationis, quæ terminos inuertit. Si enim fuerit ratio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum: erit & κατὰ ἀναστροφὴν τοῦ λόγου residuum primi & secundi ad primum, sicut residuū tertij & quarti ad tertium: ut si 6 ad 4, veluti 15 ad 10, igitur 4 ad 2, quod est residuum de sex, sicut 10 ad 5, quod est residuum de 15, hoc modo.



Et ἐναλλὰξ ut differentia 6 & 15 ad sex: sic differentia 4 & 10 ad 4. Vtrobique enim est ratio sesquialtera. Et ἀνάπαλιν in omnibus.



Demonstratur prop. 19. lib. 5.

6. Δι' ἴσου est exæquationis ratio, id est, sumtio extremorum subtractis medijs. Plures enim numeri in unam rationem ex parte una sumuntur: atque alij totidem vel eiusdem generis vel alterius ex parte altera secundum eandem rationem applicantur: & mediorum æquali numero remoto, similitudo rationum in extremis infertur: ut sint sex numeri proportionales. 8. 4. 2. 12. 6. 3. Hic sicut 8 ad 4 & 4 ad 2 se habent: sic 12 ad 6, & 6 ad 3. Igitur sicut 8 ad 2 se habent; sic 12 ad 3, hoc modo.

8. 4. 2. — 2 2 — 4.   12. 6. 3. — 2 2 — 4.

Demonſtratur lib. 5. prop. 20.

Eſt autem ſexta ſpecies duplex: alia ordinata, alia perturbata. Ordinata eſt, cum ſumuntur bini ac bini numeri in eadem ratione, & idem ordo ſeruatur, ut in ſuperiori exemplo.

Perturbata eſt, cum ordo idem non ſeruatur, ſed inuertitur: ut ſint ijdem ſex numeri, 8. 4. 2. 12. 6. 3. Hic ſicut 8 ad 4: ita 6 ad 3: deinde ut in primis numeris 4 ad 2: ita in ſecundis numeris 12 ad ſex.

8. 4. 2.   12. 6. 3.

AXIOMATA.

1. Harmonica proportio modo ab Arithmetica diſcedit ad Geometricam: modo ab hac ad illam rurſus accedit: modo utrique coniuncta videtur: modo ab utraq; diſcedit.

2. Maximus numerus oblatæ progreſſionis dari non poteſt: cum numeri in infinitum continuari poſſint: minimus vero dari poteſt. Numeri enim in infinitum decreſcere non poſſunt.

3 Si quatuor fuerint numeri proportionales: tum numerus prodiens ex multiplicatione primi & ultimi æquatur illi, qui naſcitur ex ſecundi & tertij multiplicatione, 19 *prop. 7.* ut in iſtis numeris: 8. 6. 4. 3. numerus procreatus ab extremis 8 & 3 æquatur producto à 6 & 4 medijs. Hæc proprietas conuertitur ſic. Si procreatus à medijs, æquat procreatum ab extremis, numeri ſunt proportionales. *Propoſ. 19. lib. 7.* Demonſtratio linearis 16. *prop. lib. 6. & prop. 14. eiusdem libri.*

4. Omnis numerus eſt medietas duorum proximè utrinque poſitorum, vel æqualiter ab eo utrinque diſtantium & coniunctorum: ut inter hos numeros 3, 4, 5. exceſſus vel diffe-

differentiæ sunt æquales. Iam 3 & 5 coniuncta faciunt 8, quorum dimidium est 4. Est igitur 4 medietas ternarij & quinarij.

Sic inter istos numeros 6. 10. 14, sex tantum distant à 10, quantum 10 à 14. Iam 6 & 14 addita faciunt 20, quorum dimidium est 10.

MEDII PROPORTIONIS HARMONICÆ INVENTIO.

πρότασις. Medium in proportione harmonica inuenire.

ἔκθ. *Sint duo extremi dati 12 & 6.*

Δ. Oportet *inter duos datos 12 & 6 medium terminum harmonicum inuenire.*

κατ. *Medium in proportione harmonica inuenitur, si extremi coniungantur: & rursus si eorum differentia multiplicetur per minimum extremorum, & productum diuidatur per summam extremorum, tandem quod prouenit addatur ad minimum terminum extremum; ut in exemplo proposito sic.*

1. Extremi 12 & 6 coniuncti faciunt 18.

2. Differentia inter 12 & 6 est sex, quæ ducta in sex minimum extremorum, faciunt 36.

3. Productum 36 diuisum per 18, summam duorum extremorũ facit 2: quod additum ad 6, minimum terminum, octo constituit.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 8 esse medium proportionale harmonicum, hoc modo. 12.*[4] *8.*[2] *6.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. Definitio. *Proportio harmonica est, in qua tribus numeris positis, sicut se habet maximus ad minimum: sic se habet differentia maximi & medij ad differentiam medij & minimi.*

Inter hos numeros 12, 8, 6, est proportio harmonica. Ergo ut se habet 12 ad 6: sic se habet 4 ad 2. Vtrobiq; enim ratio dupla est.

 2 Syll.

2 Syll. axioma συνθέσεως. *Si fuerit ratio primi ad secundum, ut tertij ad quartum: erit etiam coniuncto modo eadem ratio primi & secundi ad secundum: ut tertij & quarti ad quartum.*

In datis quatuor numeris ea est ratio primi ad secundum, qua tertij ad quartum.

Ergo ut se habet 18 ad 6: ita 6 ad 2. Nam 18 est summa primi & secundi: 6 est summa tertij & quarti. Hac est causa cur 12 & 6 coniungantur.

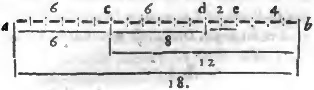
3 Syll. 20 septimi, siue 3 axioma. *Productum extremorum est æquale producto intermediorum. Hic sunt duo extrema, 18 & 2: & duo intermedia 6 & 6. Ergo productum ex ductu 18 in 2 est æquale producto orto ex ductu 6 in se. Vtrobiq; enim productum est 36.*

4 Syll. sentent. diuis. *Dato producto duorum numerorum & uno numero, dabitur & alter per diuisionem.*

Hic est productum duorum intermediorum 6 & 6, æquale producto extremorum: & unum extremorum est 18. Ergo per diuisionem alter extremorum est 2.

5 Syll. sentent. addit. *Datis partibus alicuius totius cognoscetur totum earum per additionem. Duæ partes medij harmonici sunt 6 & 2. Ergo totum medium harmonicum est 8, quod demonstrandum fuit.*

Demonstratio linearis.



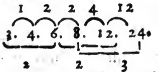
σχόλιον.

1. Medium, Græcè μεσότης, est connexio quædam extremorum per habitudinem utriusque ad medium.

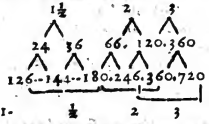
2. Ex qualibet progreßione Arithmetica trium terminorum producitur progreßio harmonica trium terminorum, hoc modo. Multiplica primum in secundum; deinde primum in tertium; & tandem

dem secundum in tertium: ut ex hac Arithmetica 1. 2. 3. fit hæc harmonica 2. 3. 6. Et ex hac Arithmetica, 3. 4. 5. fit hæc harmonica 12, 15, 20. Et sic de alijs. Stifelius lib. 1. c. 7.

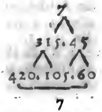
3. Certum est hanc progressionem 2, 3, 6. & alias infinitas progressiones harmonicas trium terminorum non posse ulterius extendi: certum vero & illud: hanc harmonicam 3.4.6, & alias infinitas posse extendi ultra tres terminos. Id quod cubi consideratio admonet: qui cum habeat sex superficies, & octo angulos solidos, duodecim latera, & 24 angulos superficiales, pulchrè harmonicam quatuor terminorum proponit hanc. 6. 8. 12. 24. ut apparet in sequenti schemate.



4. Ex qualibet progressione Arithmetica potest progressio harmonica produci habens tot terminos, quot ipsa Arithmetica terminos habet, hoc modo. Terminos tuæ Arithmeticæ progressionis inter se omnes multiplica: deinde productum diuide per singulos terminos tuæ Arithmeticæ, incipiens à maximo usque ad minimum: ut ex hac Arithmetica 1,2,3,4,5,6. fit hæc harmonica. 120. 144. 180. 240. 360. 720. Examen est hoc.



5. Extremum maius ignotum inuenitur per medium & extremū minus hoc modo. Differentiam minoris à medio subtrahe ex minimo: & per residuum diuide productum, quod fit ex medio in minimum ducto. Quotus enim erit terminus maior, qui ignorabatur: ut sint duo termini noti: medius 105: 60 extremus minor. Differentia minoris à medio est 45: quæ subtracta à minimo 60, relinquunt 15: per quæ diuiso producto 6300, quod fit ex medio in minimum ducto, emergit quotus 420, quæsitus terminus maior. Termini igitur tres sunt hi. 420. 105. 60. Examen est hoc.



6. Extremum minus ignotum inuenitur per medium & extremum maius hoc modo. Termino maiori iungatur differentia maioris à medio: & per hoc aggregatum diuidatur productum ex maiore in medium ducto: ut sint duo termini, medius 105: maior 420. Aggregatum maioris cum differentia maioris à medio, quæ est 315 facit 735. productum ex maiore in medium ducto est 44100. Quotus hoc producto diuiso per aggregatum prius est 60, terminus minor quæsitus. Operationis demonstratio extat apud Ioh. Bapt. Bend. Theor. 131.

MEDII ARITHMETICI INVENTIO.

πρότασις. Medium in proportione Arithmetica trium terminorum inuenire.

ἔκθ. *Sint duo termini 2, & 18.*

Διορ. Oportet *inter duos datos 2 & 18 medium terminum Arithmeticum inuenire.*

Κατασκ. *Adde duo extrema: & productum diuide per duo: ut in nostro exemplo, 2 & 18 faciunt 20, quibus per duo diuisis emergunt 10.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 10 esse medium Arithmeticum inter duos datos terminos 2, & 18.* Ἀπόδειξις.

4 axioma lib. 3. *Omnis numerus est medietas duorum utrinque positorum, & æqualiter ab eo distantium & coniunctorum. Hic sunt duo termini extremi 2 & 18, qui coniuncti faciunt 20. Ergo 10, quod est dimidium 20, est medium Arithmeticum, inter 2 & 18. Distat autem 10 ab utroque extremorum æqualiter, nempe, per distantiam octonarij: quod demonstrandum fuit.*

σχόλιον.

σχόλιον.

1. Progressionum Arithmeticarum aliæ incipiunt ab unitate, & progrediendo æqualiter augentur: ut 1. 2. 3. 4. 5. quæ progressio naturalis dicitur. Et 1. 3. 5. 7. 9. & sic deinceps. Aliæ à binario, vel ternario, vel alio quouis dato numero incipiunt, & progrediendo similiter per binarium, vel ternarium, vel alium quemcunque numerum augentur: ut 2. 4. 6. 8. 10.

2. In proportione Arithmetica tum continua tum disiuncta, dispositis quatuor terminis duo medij sunt æquales utrique extremo: ut 6. 8. 10. 12: hic 6 & 12 termini sunt extremi: 8 & 10 termini medij. Iam summa extremorum, quæ est 18 est æqualis summæ mediorum, nempe 8 & 10. Hæc proprietas suppeditat inuentionem mediorum inter duos datos.

3. Aggregatum extremorum æquale est cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium, ut hic apparet. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Aggregatum extremorum est 11. Tantum faciunt 2 & 9: item 3 & 8: 4 & 7: 5 & 6. qui æqualiter ab extremis distant. Quod si numerus terminorum impar est, aggregatum extremorum similiter æquale est cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium: duplo autem medij numeri, ut hic apparet. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Aggregatum extremorum est 12. Tantum faciunt 2 & 10, 3 & 9, 4 & 6, 5 & 9, denique sex bis sumtum.

4. Procreatus à medijs superat procreatum ab extremis, ut 2. 3. 9. 10: hic bis decem, quæ sunt 20 est minus quàm 27. productum ex 3 in 9, qui sunt medij.

5. Procreatus à medio superat procreatum ab extremis, ut in 3. 5. 7. Hic 25 procreatus à 5 in se multiplicato superat 21 procreatum à 3 & 7.

6 Datis tribus quantitatibus cognatis, si quis quartam inuenire velit, quæ talis sit respectu tertiæ, qualis est secunda respectu primæ, secundam tertiæ addat: ex qua detracta prima relinquet quartam: ut sint dati tres numeri, 20. 17. 9. His quartus proportionalis succedet sex: quia totus ex secunda & tertia est 26, à quo detracta 20, relinquunt sex.

7. Idipsum prodit, si quis ex tertio termino differentiam primi & secundi subtrahat. Hic tamen modus non tam uniuersalis est, quàm ille. Nam si quartus terminus incognitus tertio maior esse debeat, dictam differentiam cum tertio termino, in summam unam colliget. Et sic termini omnes continuo ordine quæruntur.

8. Datis

8. Datis duobus terminis, si tertius requiratur, secundus duplicandus erit: & ex producto, si subtrahatur primus, tertius proferetur: ut sint duo termini 3. 7. Tertius erit 11. Nam 3 à 14 si auferas restant 11. Potest vero idem & sic effici, si quis differentiam primi & secundi termini secundo addat: aut à secunda subtrahat. Prior vero ratio latius patet: altera angustior est.

9. Datis duobus extremis, si secundus requiratur ex quatuor terminis continuæ Arithmeticæ proportionis, duplica primum (sumto quolibet pro primo) & coniunge ultimo termino, nempe quarto. Tertia pars summæ erit secundus terminus quæsitus: ut sint dati duo extremi, nempe 12 & 3, quorum secundus à dextra versus sinistram erit sex hoc modo. Bis 3 sunt sex: sex vero & 12 sunt 18: quorum tertia pars sex est. Idem prodit sumto principio à maximo. Erit autem secundus 9. Nam 12 duplicata faciunt 24 quibus constituunt 27. Iam tertia pars de 27 sunt 9. Erunt igitur termini quatuor sic dispositi. 12. 9. 6. 3.

10. Datis duobus extremis si secundus requiratur ex quinque terminis continuæ Arithmeticæ proportionis, coniũge ultimum triplo primi. Quarta pars summæ erit secundus terminus quæsitus: ut sint dati duo extremi 18 & 10, inter quos medij sint tres. Dico secundum fore 16. Nam triplum primi (si à genere maioris inæqualitatis progrediemur) est 54: cui si alter extremorum, nempe 10 addatur, emergunt 64: quorum quarta pars est 16. Erunt igitur termini sic dispositi. 18. 16. 14. 12. 10.

11. Quod si velis inuenire secundum è sex terminis, quadruplica primum: deinde adiuncto ultimo, quinta pars summæ erit secundus terminus: & sic ex terminis septem, octo, & alijs, crescente multiplicatione primi, ultimoq; coniuncto.

12. In quauis progressione Arithmetica ultimum, siue oblatum quemcunque numerum minimo negotio etiam incognitis medijs sic colliges. A seriei numero unitatem subtrahe & residuum numero excessus multiplica. Productum enim si primo progressionis numero addatur, nascetur postremus: ut in progressione ternarij 4. 7. 10 quæratur duodecimus terminus, qui sit vel oblatus, vel ultimus, à quaternario initium sumendo. A 12 igitur, si unum auferas, & 11 reliquum per 3 multiplicatum, hoc est, 33 addas 4, termino primo, totus 37 erit terminus siue optatus, siue ultimus. Ita tricesimus erit 91, atque ita deinceps.

13. Contrà si dato primo & ultimo termino, notoque item excessu, colligere alicui numerum laterum siue terminorum libet, primum ex ultimo subtrahat: residuum vero per numerum excessus diuidat:

diuidat: quotus quot sint in data progressione distincti termini, excepto primo, ostendet: ut in exemplo præcedenti ultimus numerus fuit 91: si ex hoc subtrahatur 4, supersunt 87, quibus per tria diuisis, quotus 29 colligitur, significans tot esse progressionis numeros excepto primo.

ADDITIO PROG. ARITHM.

πρότασις. Numeros progressionis Arithmeticæ breuiter addere.

Ἐκθ. *Sint decem numeri progressionis Arithmeticæ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.*

Δ. Oportet *hos datos numeros breuiter una summa complecti.*

Κατ. *Primum terminum ultimo coniunge: & dimidium producti per numerum locorum multiplica: vel contrà, ultimum terminum iunctum primo per dimidium numeri terminorum multiplica: & prodibit datorum terminorum summa: ut in dato exemplo in progressione decadis, 10 iunctum monadi facit 11: dimidium producti 5½ multiplicatum per numerũ locorum, nempe decem facit 55.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 55 esse summam decem datorum progressionis Arithmeticæ numerorum.*

Ἀπόδειξις, eaq́ *Arithmetica.*

1 Syll. sententia tertia. *In numeris progressionis Arithmeticæ, aggregatum extremorum est æquale cuilibet aggregato quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium. Hic sunt numeri progressionis Arithmeticæ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ergo aggregatum extremorum 1, & 10, nempe 11 est æquale aggregato quorumlibet numerorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, ut 2 & 9, 3 & 8, 4 & 7, 5 & 6. Et hæc est causa, cur primus terminus coniungatur ultimo in operatione.*

2 Syll. sententia. *Quot sunt bini termini, tot sunt aggregata mediorum terminorum inter se æqualia. Hic bini termini sunt quinq́, nempe 1 & 10, 2 & 9, 3 & 8, 4 & 7, 5 & 6. Ergo sunt quinq́ ag-*

gregata mediorum terminorum inter se æqualia. Hæc est causa cur dimidium numeri terminorum sumatur.

3 Syll. sententia multiplicationis. *Datis partibus certo numero sumtis cognoscetur totum per multiplicationem. Hic sunt datæ partes certo numero quinq, quarum unaquaq est 11. Ergo 11 per quinq multiplicata faciunt totum, id est, summam omnium numerorum, quæ est 55. Hæc est causa, cur aggregatum extremorum per dimidium numeri terminorum multiplicetur.*

Ἀπόδειξις *Geometrica.*

πρότασις. Progressionis Arithmeticæ summam Geometricè colligere.

ἔκθ. *Sint numeri progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, 6.*

Δ. Oportet *horum numerorum summam Geometricè colligere.*

Κατ. *1. Collocentur termini progressionis in triangulo cellulato* d b c, *tanquam per gradus sumto initio ab unitate* e: *deinde progrediendo ad* f g, *& sic deinceps.*

2. Ducatur b c, *in* c d, *& fiat parallelogrammum* a b c d. *Est autem* b c *sex*: c d *totidem. Si igitur sex in sex multiplicetur, emerget productum 36, quod est area totius parallelogrammi,* a b c d.

3. Sumatur dimidium parallelogrammi b c d *& erit 18.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico triangulum cellulatum* b c d, *id est, summam progressionis tanto maiorem esse dimidio totius parallelogrammi, quantum dimidium diametri* e f g h i k *continet.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. porisma 41 primi. *Diameter parallelogrammum diuidit in tres partes, quarum unam diameter occupat: reliquæ duæ ambientes diametrum sunt æquales. Ergo parallelogrammi una pars* a b d *est æqualis alteri parti* b c d, *quas separat diameter.*

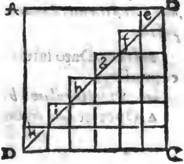
2. Syll. sententia. *Si uni æqualium aliquid additur, erit illud, cui aliquid additur, maius altero æqualium. Hic uni æqualium, nempe* b c d *additur aliquid, nempe diametri pars dimidia, constãs triangu-*

trianguli parui e f g h i k. *Ergo pars* b c d *cum diametri parte dimidia est maior altera parte* a b d, *id est, dimidio totius parallelogrammi, pro tanta portione, quantum est dimidium occupatum à diametro.*

3 Syll. sententia. *Quantum est dimidium numeri terminorum, tantum est dimidium diametri, si progressionis numerus sit unitas. Tot enim sunt numeri progressionis Arithmeticæ, quot partes diametri. Ergo ut dimidium numeri terminorum est tria, ita diametri dimidium est tria.*

4. Sentent. addit.. *Datis partibus dabitur totum per additionẽ. Hic dantur partes duæ, primum parallelogrammi pars dimidia b c d, quæ est 18: deinde dimidia diameter, quæ est tria. Ergo totum per additionem est 21, quæ sunt summa trianguli cellulati, seu numerorum progressionis datorum: quod demonstrasse oportuit.*





Quod si progressio ab alio numero, quàm ab unitate inchoat: dimidium diametri inuenitur multiplicatione primi in dimidium numeri locorum: ut sint numeri, 3, 5, 7, 9, 11. Hic quinquies 11 sunt 55: dimidium productum est $27\frac{1}{2}$ *dimidium diametri* $7\frac{1}{2}$. *Iam* $27\frac{1}{2}$ *addita* $7\frac{1}{2}$ *faciunt 35, summam progressionis.*

Ratio operationis est, quia ratio dimidiæ unitatis ad dimidium minimum terminum conuenit cum ratione dimidij numeri terminorum ad dimidiam diametrum: ut si dimidia unitas sit $\frac{1}{2}$: *& di-*

midium minimi termini 1½: dimidius numeri terminorum, nempe 2½ dabit 7½, dimidiam diametrum. Sic si dimidia unitas sit ½, & dimidius numerus minimus ½: tum dimidium numeri terminorū 6 erit 3, & dimidia diameter 3.

Hac demonstratio modum additionis paulò diuersum facit, ab eo quem Arithmetica demonstratio docuit. Nam primum latera includentia, id est, numerum locorum per ultimum terminum multiplicat: deinde productum dimidiat: tandem dimidio addit dimidium diametri, & sic summam progressionis inuestigat. Inde vero apparet, quod Arithmetici trigoni non respondent trigonis Geometricis. Nam, verbi gratia, trigonus Arithmeticus superior aequilaterus habet aream 21, Geometricus vero tantum 18.

Eadem est regula inuentionis arearum polygonalium numerorū, hoc est, qui trium vel quatuor, vel plurium etiam angulorum schemata constituunt. Eandem vero & paulo aliter docet sequens propositio.

πρότασις. Dato latere cuiuscunque polygoni, aream illius cognoscere.

ἐκθ. *Sit triangulum a b c, cuius latus a b sit 6 partium.*

Δ. Oportet *dati trianguli aream inquirere.*

```
      a
      o
     o o
    o o o
   o o o o
  o o o o o
c o o o o o o b
```

Κατ. *1. Subtrahe 2 ex numero angulorum polygoni: & unitatem ex numero dati lateris.*

2. Residua multiplica inuicem, & producto adde 2.

3. Summa hac ducta in semissem: vel contrà semissis lateris in hanc summam facit quaesitum polygonum, hoc modo.

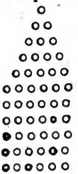
1. Duo subtracta à 3 (Triangulum enim habet 3 angulos) relinquunt 1: & unitate subtracta à 6 remanent 5.

2. 5 in 1 ducta faciunt 5, quibus si 2 addantur fiunt 7.

3. 7 multiplico per 3 (semissem 6 lateris) & proueniunt 21.

Repeti-

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico aream trianguli a b c esse 21 partiũ.*



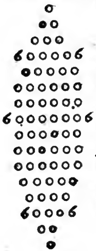
Eodem modo pentagoni, cuius unum latus est 6 area continet 51, hoc modo.

1. Duo subtracta à 5 (pentagonum enim habet 5 angulos) relinquunt 3: & unitate subtracta à 6 remanent 5.

2. 5 in 3 ducta faciunt 15, quibus si 2 addas fiunt 17.

3. 17 multiplico per 3 (semissem 6 lateris) & proueniunt 51.

Ἀπόδειξις *Arithmetica resoluit aream in numeros progressionis Arithmeticæ hoc modo. Subtracta unitate à numero angulorum (siue laterum) pone unitatem terminum primum, & residuum terminum secundum. Postea tot numeros continua, quot puncta habuerit area polygonia in uno latere. Quo facto utere regula progressionis communi. V. G. Sit hexagonus Arithmeticus, cuius latus unum habeat puncta 6. Subtracta igitur unitate à 6 (qui numerus angulorum est) pono terminos priores duos, 1 & 5, & sic secundum horum differentiam reliquos quatuor, hoc modo, 1, 5, 9, 13, 17, 21. qui collecti secundum communem regulam faciunt 66, summam totius areæ hexagoni.*



Polygoniorum Geometricorum alia est ratio, de quibus docetur alibi.

σχόλιον.

1. Additio numerorum progressionis Arithmeticæ fit per additionem generalem, de qua supra in primo libro diximus: breuior autem & specialis hoc loco docetur, in qua tantum extremorum cognitione opus est.

2. Specialiter additio duos casus habet. Numerus enim ultimus in progressu aut est par, aut impar. Si par fuerit, ipsius dimidium multiplica in imparem proximè numerum sequentem: ut sint hi

numeri. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Hic ultimus terminus 10 numerus par eſt: ipſius dimidium quinque, quod multiplicatum in 11, qui numerus impar proximè ſequitur, conſtituit 55, ſummam totius decadis.

3. Si progreſsio terminetur impari numero, diuide illum per duo, & quotum una cum reſiduo, qui eſt monas, per ultimum numerũ multiplica, fietq́ue ſumma progreſsionis: ut ſint hi numeri, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Hic ultimus terminus 11, numerus impar eſt, qui diuiſus per duo, facit quinque. Addita vero monas reſidui facit ſex, quæ multiplicata in 11 conſtituunt 66, ſummam progreſsionis ab uno ad undecim.

4. Modus Arithmeticè demonſtratus, pro illis commodus eſt, qui multiplicationem cum particulis ignorant.

5. Δοκιμασία operationis eadem eſt, quæ additionis in genere. Nam ſi ſingulos in ſerie numeros à ſumma ſubtraxeris: & nihil ſit reliquum, rectè collegiſti. Sin minus, error commiſſus eſt. Sed δοκιμασία hæc ipſa praxi operoſior: poteſt vero fieri probatio & per ſubtractionem ſiue nouenarij, ſiue ſeptenarij, eo modo, quo alibi dictum eſt.

MEDII GEOMETRICI INVENTIO.

Πρότασις. Medium in proportione Geometrica trium terminorum inuenire.

Duo ſunt caſus. Medium enim inuenitur aut unum aut plura.

Ἔκθ. primi caſus. *Sint dati duo numeri 4 & 16.*

Δ. Oportet *inter duos datos 4 & 16 medium terminum Geometricum, eumq́ unicum inuenire.*

Κατασ. *Datos numeros in ſe inuicem ducas: producti radix quadrata erit quæſitum: ut in dato exemplo ductis 4 in 16 ſiunt 64, quorum radix octo.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico 8 eſſe quæſitum medium.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. definitio analogorum. *Dati tres ſunt analogi, quorũ primus ſe habet ad ſecundum: ut ſecundus ad tertium. Hic ſunt tres numeri, 4, 8, 16, ex quibus 4 ad 8: ut 8 ad 16. Ergo hi tres 4, 8, 16, ſunt analogi.*

2 Syll.

2 Syll. 11 octaui. *Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt. Hic sunt tres analogi, 4, 8, 16. Ergo quadrata singulorum sunt similiter analoga. Sunt autem hæc. 16. 64. 256.*

3. sententia. *Quorum ratio est eadem, eorundem est simile medium. Hic eadem est ratio 64 ad 16 & 256, quæ est 8 ad 4 & 16. Ergo ut 64 est medium inter 16 & 216: sic 8 est medium inter 4 & 16.*

Ex hoc syllogismo apparet, cur radix quadrata extrahatur pro inueniendo medio: quod demonstrandum fuit.

ἐκθ. secundi casus. *Sint dati duo numeri 27 & 8.*

Διορ. Oportet *inter duos datos, duos proportione medios Geometricos inuenire.*

Κατ. *Sume radices cubicas datorum numerorum, & quam illæ rationem inter se habent, similem constituas primi numeri ad aliū: & illius ad alium. Hi enim numeri medio loco proportionales erunt inter duos datos: ut in exemplo proposito, sumo duorum numerorum 27 & 8 radices cubicas 3 & 2: quæ sunt in ratione sesquialtera: iam ut se habet 3 ad 2, ita se habet 27 ad 18: & ut 27 ad 18, ita 18 ad 12, item 12 ad 8.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico hos numeros 27. 18. 12. 8. esse in continua ratione: 18 autem & 12 esse duos medios quæsitos.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. *Ratio cuborum ad cubos est tripla, ut quadrati ad quadratum dupla. Ergo quatuor numerorum in continua ratione ratio erit, quæ radicum cubicarum extremorum.*

2 Syll. conclusio præcedentis syll. *Quatuor numerorum in continua ratione &c. Hic sunt 4 termini in continua ratione 27. 18. 12. 8. & ratio radicum cubicarum 3 & 2, terminorum extremorum est sesquialtera. Ergo & ratio intermediorum est sesquialtera.*

3 Syll.

3 Syll. ſententia. *Data ratione, & uno termino, dabitur alter numerus per diuiſionem. Hic datur ratio* $\frac{2}{3}$ *& unus terminus 27. Ergo per diuiſionem alter terminus eſt 18.*

4 Syll. *Per eandem tertius terminus eſt 12 hoc modo.*

$\frac{2}{3}$ ╳ $\frac{18}{27}$ *(12, quod demonſtrandum fuit.*

Sic ſi quinq; ſint continuè proportionales, eam habebunt inter ſe rationem, quam radices quadriquadræ terminorum extremorum: ut inter 81 & 16 tres reperiuntur medij, 54, 36, 24. Nam inter 81 & 16 eſt ratio ſeſquialtera. Radix enim quadriquadra de 81 eſt 3, & radix quadriquadra de 16 eſt 12. Sic ſex terminorum continuè proportionalium ratio, quæ radicum relatorum, atq; ita deinceps.

σχόλιον.

1. Medium inuentum vel verum eſt, vel ἔγγιστα, vel per coſsicas denominationes. ἔγγιστα ſenſu à vero non differt.

2. Medium verum inueniri poteſt, ſi multiplicatis numeris ſiue terminis rationis, proueniat ex multiplicatione numerus quadratus. Tum enim eius radix cadet medio loco proportionalis inter numeros datos, vel terminos rationis propoſitæ, & ob id ea ratio diuidi poterit. Si autem numerus non ſit quadratus, medium verum dari non poteſt, nec ratio diuidi in duas vel plures rationes æquales: ut inter 16 & 9 medium proportionale verum eſt: eò quod ex ductu 16 in 9, emergit numerus quadratus 144. cuius radix eſt 12. At inter 3 & 2 fieri non poteſt, ut aliquis numerus cadat medio loco verè proportionalis, eò quòd ex ductu trium in duo emergit 6, cuius nulla certa eſt radix: ideóque ratio ex his numeris facta, diuidi non poteſt in duas aut plures æquales rationes, quæ numeris explicari poſsit: ὡς ἔγγιστα vero eſt $2\frac{2}{5}$: vel radix 6.

3. Quilibet numerus medius eſt proportione inter numerum ſui quadrati & unitatem: ut 3 eſt medius inter 9 & 1: 4 eſt medius inter 8 & 1: 5 eſt medius inter 10 & 1: & ſic deinceps.

4. Quiuis numerus per alterum multiplicatus & diuiſus medius eſt proportione inter productum multiplicationis, & quotum diuiſionis: ut 8 eſt medius inter 32 & 2. Multiplicatus enim per 4 facit 32: diuiſus per 4 facit 2.

5. Medium inter duos quadratos breuiter ſic reperies Latera quadratorum propoſitorum multiplica inter ſe: & numerus qui prouenit,

uenerit, erit proportione medius, ut, 4. 6. 9. | 25. 45. 81.

2 —— = —— 3. | 5. —— = —— 9.

6 | 45

6. Hinc Arithmetici dicunt, τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν διαστήματα εἶναι δύο μόνα τῶν, ἢ οὐ πλείω. Nam unus tantum numerus proportione medius intercedere potest. Ita duo solummodo interualla fieri oportet.

7. Quod si inter duos numeros datos tres medio loco proportionales sint inueniendi, sic quoq; procedere licet. Duc numeros propositos in se: producti radix quadrata erit medius: hunc age in utrunque numerum datum, & productorum sume radices quadratas: hæ erunt reliqui duo numeri, inter numerum inuentum & datos: ut sint propositi numeri 162 & 32, inter quos tres medio loco proportionales sint inuestigandi. Duc 32 in 162, prodeunt 5184, cuius quadrata radix 72 est medium, quo in utrunque numerum datum 32 & 162 multiplicato proueniunt 2304 & 11664, quorum radices quadratæ 48 & 108 sunt reliqui numeri utrinque. Ergo inter 162 & 32 cadunt hi tres 108. 72. 48.

8. Doctrina de inueniendo medio est cognata diuisioni rationum. Extremorum enim rationes ex omnibus rationibus intermedijs sunt compositæ.

9. Extremi termini additi superant terminum medium & duplicatum: ut 3. 9. 27. Hic 30 maior est quàm 9, & quàm 18, hoc est, duplicato nouenario. Numerus vero, qui ex primo numero in tertium producitur, æqualis est numero, qui ex medio fit in seipsum multiplicato: ut in priori exemplo. Productum extremorum est 81: idem productum 9 in se ducti.

QVARTI PROPORTIONALIS INVENTIO.

πρότασις. Datis tribus numeris inuenire quartum proportionalem. τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν.

ἔκθ. *Sint dati tres numeri, 5. 15. 20.*

Δ. Oportet *inuenire quartum proportionalem.*

Κατ. *Tertius multiplicetur per secundum: & productum diuidatur per primum, ut in proposito exemplo: 20 ducta in 15 dant 300. Deinde hoc productum diuisum per 5 dat 60, hoc modo.*

5. d. 15: q. 20.

$\frac{\overset{20}{300}}{5}$ (60.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 60 esse quartum proportionalem.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 3. axioma lib. 3. *Si fuerint quatuor numeri proportionales: productum intermediorum erit æquale producto extremorũ. Hic sunt quatuor numeri proportionales 5. 15. 20. & quartus ignotus. Ergo productum intermediorum, nempe 15 & 20 est æquale producto extremorum.*

2 Syll. sentent. multipl. *Datis duobus numeris dabitur eorum productum per multiplicationem. Hic sunt duo numeri 15 & 20. Ergo horum numerorum 15 & 20 productum datur per multiplicationem: ut 300.*

3 Syll. sententia. *Dato uno æqualium, dabitur & alterum. Hic sunt duo æqualia producta: per demonstrationem primi syllogismi: & datur unum productum intermediorum 300. Ergo datur & productum extremorum, scilicet 300. Hinc apparet cur intermedij, id est, secundus & tertius in se ducantur. Nam secundi in tertium multiplicatio producit idem, quod procrearetur, si primus in quartum ignotum multiplicaretur.*

4 Syll. sententia diuisionis. *Dato producto & eius uno numero dabitur & alter eius numerus per diuisionem.*

Hic datum est productum duorum extremorum, scilicet 300 per demonstrationem tertij syll. Et huius producti unus numerus est datus, nempe 5.

Ergo eiusdem producti alter numerus dabitur per diuisionem, qui erit 60, numerus scilicet quæsitus: quod demonstrasse oportuit. Ex hoc postremo syllogismo apparet ratio diuisionis in regula proportionum. Demonstratio linearis docetur 16. prop. 6. Elem. Datis enim quatuor magnitudinibus in proportione orthogonium extremis duabus inclusum æquatur illi, quod media comprehendunt.

Χρήσιμον.

1. Proportio contigua siue disiuncta sub quatuor tantum terminis maximè utilis esse inuenitur, & adeò quidem utilis, ut regulæ aureæ nomen acceperit, de qua plura suo loco.

2. Neque vero tantum quartus terminus ignotus hac regula & methodo deprehenditur, sed & primus & uterque mediorum.

3. Si primus numerus deest, duc medios alterum in alterum: & productum per ultimum partire. Quotus enim erit numerus, primo loco collocandus: ut in tripla ratione sint termini tres, 9, 27, 81, quibus cupio addere eum, qui reliquos omnes antecedit, hoc est, primum, à quo ratio ipsa nomen habet. Duco igitur 9 in 27, fiunt 243, quibus per 81 diuisis, redduntur 3, hoc modo.

I	II	III	IIII
0	9.	27.	81.

9
243
81 (3.

4. Si ignoretur numerus secundo loco collocandus, tunc productum ex multiplicatione extremorum diuide per tertium, & prodibit numerus secundo loco collocandus: ut in exemplo sequenti.

I	II	III	IIII
2.	0.	44.	110.

2
220
44 (5.

Hic 5 est numerus secundo loco collocandus.

5 Si tertius ignoratur, tunc productum extremorum inter se multiplicatorum diuide per secundum, & prodibit tertius: ut in exemplo sequenti.

I	II	III	IIII
23.	48.	0.	144

23
432
288
3312
48 (69.

Hic 69 est numerus tertius in ordine proportionalis.

6. Potest vero quartus inueniri & pluribus modis. Secundum

 enim

enim propositum problema est, multos canones ex se fundens, ex quibus Barlaam lib. 5. propos. 4: quatuor recitat, præter vulgarem, supra propositum.

1. Diuidatur secundus per primum: quod exit ducatur in tertiũ: productum erit quæsitum. V. G. Sint tres numeri proportionales 8. 4. 6. hic diuisis 4 per 8 fit $\frac{1}{2}$: quo ducto in 6 fiunt 3, quarto loco debita. Vel sic.

2. Diuiso tertio per primum, quod exit, ducatur in secundum: Erit enim productum quarti loci. V. G. Sint 9. 6. 3: diuide 3 per 9, fit $\frac{1}{3}$: quo ducto in 6 secundum terminum exit $\frac{6}{3}$, id est, 2, quartus proportionalis. Vel sic.

3. Diuidatur primus per secundum: per quotum diuide tertium: quod exit satisfaciet quæsito. E. G. 4. 2. 6. Diuide 4 per 2, exit 2. Per 2 si diuidas sex, habebis tria, quartum analogum. Vel sic.

4. Diuidatur primus per tertium: deinde per id quod exit, diuide secundum. Huius enim diuisionis quotus obtinebit quartum locũ: ut in hisce, 4. 2. 6. Diuisis 4 per 6 fiunt $\frac{4}{6}$: rursus per $\frac{4}{6}$ diuide 2, exibunt $\frac{12}{4}$, id est, tria quarto loco tribuenda.

Ex his quatuor vijs duæ ultimæ diuisione tantum absoluuntur: duæ autem priores conueniunt cum vulgari; quæ fit diuisione & multiplicatione: hoc tamen discrimine: in vulgari præcedit multiplicatio, subsequitur diuisio: in reliquis duabus contrà fit.

7. Quàm breuissime vero quartus proportionalis sola vel multiplicatione vel diuisione inueniri potest, per hanc regulam. Data ratione inter duos terminos & uno eorum, dabitur & alter eorum, maior per multiplicationem: minor per diuisionem. E. G. Sint tres nmeri 4. 2. 6. Hic cum inter 4 & 2, sit ratio dupla, diuido sex per duo & prouenit 3 numerus quartus. Rursus sint ijdem tres numeri transpositi 2. 4. 6. Hic cum inter 2 & 4 sit ratio subdupla multiplico sex per duo, & prodit 12 numerus quartus & quæsitus. In prologo igitur sit diuisio, in hypologo multiplicatio.

8. Datis duobus terminis, si tertius requiratur eiusdem rationis cum secundo, cuius secundus cum primo est: secundus duplicetur, & productum per primum diuidatur. V. G. Sint duo termini 2 & 4. Requiritur tertius, qui ita se habeat ad secundum, ut secundus ad primum, 4 duplicetur & prodit 16: productum diuisum per 2 facit 8, numerum tertium, eumque quæsitum. Causa supputationis numerorum continuæ proportionis eadem est, quæ disiunctæ. Disiuncta enim ponit tres terminos actu: continua tres potentiâ. Nam secundum terminum ponit quidem semel actu: potentia verò bis.

Sic

Sic enim procedis. Vt se habet 2 ad 4: ita 4 ad numerum ignotum.

9. Numerus quartus inuentus appellatur pars proportionalis: Græcis τὸ ἐπιβάλλον μέρος, vel absolutè τὸ ἐπιβάλλον. Nam quartus numerus ea ratione ἐπιβάλλει, id est, congruit ad tertium, qua secundus ad primum, secundum datam rationem. Primum numerum Mathematici vocant antecedentem prioris rationis: secundum, consequentem prioris rationis. Tertium vocant antecedentem posterioris rationis. Quartum tum partem proportionalem: tum consequentem posterioris rationis. Quælibet enim ratio versatur inter duos terminos.

10. Δοκιμασία operationis varijs modis potest institui: iteratione operis, vario operationis modo, inuersione numerorum, praxi Italica, abiectione septenarij vel nouenarij: ductu primi in quartum: æqualitate rationum.

Iteratio operis est repetitio eiusdem, eiusq; vulgaris supputationis.

Varius operationis modus est, si quis quod vulgari supputauit modo, alijs non vulgaribus modis, de quibus antea dictum, idem exploret.

Inuersio numerorum est transpositio, qua primo loco ponitur tertius numerus: & vice versa primus tertio: loco secundo inuentus, id est, quartus: quo facto opus, ut præscribit regula, absoluatur. Nam si in fine operationis reperias numerum congruentem per omnia secundo numero operationis primæ, veritatem supputationis agnosces: sin minus errorem scias admissum vel in prima vel secunda operatione. V. G. 8. d. 6. q. 20. perfecta operatione reperies, pro quarto numero 15. Iam examinis gratia transpone numeros sic. Si 20. d. 15. q. 8. Et quoniam facta supputatione occurrunt 6, qui numerus in priori operatione erat secundo loco collocatus, pronuncio ex hoc consensu priorem operationem veram fuisse.

Praxis Italica est ingeniosa inuentio quarti termini ex tribus terminis mediante distractione varia. Aliàs autem medius terminus: aliàs tertius: interdum etiam ambo distrahuntur: cuius distractionis ratio sumta est ex generali axiomate libri primi. Fiat autem operatio cum particulis secundum vulgarem rationem: & quæ particulatim colliguntur, ea postea in unum coniuncta eum numerum efficiunt, qui terminum quartum repræsentet; ut in præcedenti exemplo diuidatur medius terminus in tres binarios, hoc modo.

8 d. { 2, 2, 2 } q. 20 — { 5, 5, 5 }

15.

Probatio per abiectionem nouenarij ipso opere prolixior est. Perficitur autem sic. Aufer nouenarium, vel septenarium à singulis proportionalibus numeris, quoties poteris: deinde multiplica residuos, si qui fuerint, inter se: primi videlicet residuum cum residuo quarti: & secundi postea cum residuo tertij numeri: tum ablato ex ambobus productis probæ numero quoties fieri poterit: si reliqui duo numeri inter se æquales fuerint, te non erraſſe scias. V. G in præcedenti exemplo, numeri proportionales sunt, 8.6.20.15. Probæ numero de singulis remoto, numeris primo & tertio: secundo item & quarto, residuum primi est 8: secundi 6: tertij 2, quarti 6. Iam ductis residuis primi & quarti inter se prouenit 48: residuis secundi & tertij prodit 12. Rursus probæ numero ablato à 48, residuum est tria. Eodem ablato à 12, remanet idem 3.

Si numerus ex ductu primi in quartum genitus fuerit æqualis numero ex ductu secundi in tertium nato, operationem veram: sin minus, falsam arguet.

Si ratio primi numeri ad secundum & tertij ad quartum: vel permutatim, ratio primi ad tertium, & secundi ad quartum eadem fuerit, verum opus: sin minus falsum, iudicandum est.

ADDITIO NVM. PROGR. GEOM.

Πρότασις. Numeros progressionis Geometricæ breuiter addere.

Ἐκθ. *Sint numeri progressionis Geometricæ, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.*

Δ. Oportet *datos hos numeros in unam summam breuiter colligere.*

Κατ. *1. Subtrahe primum terminum totius progressionis à secundo & ultimo. Excessus secundi supra primum vocetur residuum minus. Excessus ultimi supra primum vocetur residuum maius. 2. Iam ut residuum minus ad primum terminum: ita residuum maius ad quartum. Operare igitur secundum regulam auream: ut quartum proportionalem inuenias. 3 Quartus inuentus additus cum ultimo termino, summam quæsitam indicat: ut in dato exemplo progressionis dupla 2 à 4: & 2 à 128 remanent 2 & 126. Numerus pri-*

rus primus est 2. Residuum minus 2. Residuum maius 126. Iam sic dispono terminos: ut se habent 2 ad 2: sic 126 ad quartum. Facta supputatione quartus proportionalis emergit 126: qui additus ultimo termino facit 254.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico summam omnium septem numerorum datorum esse 254.*

Ἀπόδειξις.

35 noni. Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo & ultimo aquales ipsi primo: erit ut secundi excessus ad primum: ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Hic sunt septem numeri continuè proportionales 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128: & ex 4 secundo: & 128 ultimo detraho 2 numerum primum: & remanent 2 & 126.

Ergo ut 2 ad 2: ita 126 ad summam omnium, excepto ultimo, qui si addatur summa inuenta 126 procreabitur summa omnium 254, hoc modo.

126
128
―――
254.

σχόλιον.

1. Progressio est numerorum plurium per æquales excessus, vel certarum differentiarum rationes ordinata successio. Vel, numerorum proportionalium continuatio. Germ. auffsteigung. Quæ per æquales excessus progreditur, Arithmetica dicitur: quæ rationes differentiarum obseruat, Geometrica appellatur.

2. Additio in Arithmeticis progressionibus respondet multiplicationi in Geometricis: ut sicut in hac Arithmetica progressione 3. 7. 11. 15. duo termini extremi additi faciunt, quantum medij ad se additi. Vtrobique enim fiunt 18. Sic in hac Geometrica 3. 6. 12. 24, duo extremi inter se multiplicati faciunt, quantum medij inter se multiplicati. Vtrobique enim fiunt 72. Et sic in alijs.

3. Progressio Geometrica, ut & proportio, alia continua, alia disiuncta: & rursus disiuncta alia simplex, alia multiplex. Simplex constat quatuor terminis. Multiplex, pluribus.

4. Rursus

4. Rursus progreſsio tot ſpecies habet, quot ratio. Incedit igitur ſub ratione dupla, tripla, quadrupla, quintupla, & ſic deinceps.

Dupla,	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
Tripla,	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.
Quadrupla,	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.
Quintupla,	5.	25.	125.	625.	3125.	15725.	72625.

5. Continuo ordine creſcentes inueniuntur omnes multiplicatione poſtremi termini per nomen rationis extendendæ: ut in primo præcedente exemplo proportio dupla eſt: multiplicato igitur poſtremo termino per 2. conſequenter efficies plures ſic. 128, 256. 512 & ſic deinceps.

6. Pari ratione progreſsio Geometrica continuatur retrocedendo, ſi minus extremum per denominatorem proportionis diuidatur: ut ſi progreſsio hæc 243. 729. 2187. continuanda ſit verſus minores numeros, cum denominator proportionis ſit tria: diuides 243 per 3, faciesque 81, quæ rurſus partieris per 3, inuenies q; 27, & ſic deinceps in infinitum.

7. Optati termini inueniuntur hoc modo. Datis aliquot continuæ proportionis terminis ſubſcribe terminos Arithmeticæ progreſsionis naturali ordine progredietes ſub primo 0, deinde 1, 2, 3, 4, 5, &c. Adde poſtea tot characteres, quot ſummam optatorum terminorū conſtituunt: & ſupra ſcriptos duos Geometricos multiplica, unum in alterum: procreatum diuide per primum, & quotus erit ſuæ progreſsionis terminus uno maior, quàm eſt totus ex numeris Arithmeticæ progreſsionis multiplicatis reſpondentibus: ut ſint dati in progreſsione dupla octo numeri ab unitate incipientes. Ex datis his terminis inueniri poſſunt optati quotlibet. Subſcribo autem alios characteres ſic.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Iam cupio decimum tertium. Hinc ſic inuenero: ſi datorum terminorum ultimum multiplicauero per penultimum, ſcilicet 64 per 128. Ex hoc ductu oritur numerus 8192, decimo tertio loco collocandus, eò quod ſub uno horum ſeptem: ſub altero ſex notantur, qui numeri iuncti 13 efficiunt. Rurſus 8192 in ſeipſum multiplico & productum 67108864 viceſimo ſexto loco colloco. Bis enim tredecim efficiunt 26. Quod ſi trigeſimum cupiam, multiplico viceſimo ſexto loco poſitum per eum, cui ternarius ſubſcriptus eſt, & producetur 536870912. Occupat autē 29 locum trigeſimū, quia ſub primo numero 0 ponitur. Hoc cōpendio ūtimur maximè in addi-

in additione multorum terminorum euitandi tædiosi laboris gratia, ne sit necesse singulos intermedios duplicare, cum extremorũ tantum notitia ad illam operationem sit necessaria.

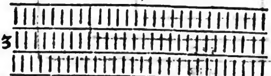
8. Modus addendi numeros progreſsionis Geometricæ alius est prolixior: alius breuior. Prolixior est, cuius demõstratio supra proposita est. Breuior est hic. Vltimum numerum multiplica per numerum rationis: à producto aufer primum numerum: quod reliquũ est, diuide per numerum unitate minorem, quàm est is, per quem facta est multiplicatio. E. G. Sit colligenda summa numerorum in dupla ratione, quæ ab unitate ad tricesimum usque terminum progreditur. Hanc sic inquiro. Postremum terminum per duo multiplico: proueniunt 1073741824. Hinc aufero unitatem, quod restat manet est vera summa totius progreſsionis. Nam quod præcipitur, ut productum ex multiplicatione ultimi termini rursus diuidatur per numerum proximè minorem eo, per quem facta est multiplicatio, id hic locum non habet, quia numerus minor binario dari non potest. Vnitas autem non diuidit, nec multiplicat.

Demonstratio huius supputationis Geometrica in numeris tribus. Sint tres numeri 3.9.27, quorum summa quæritur. Ordo illorum est hic.



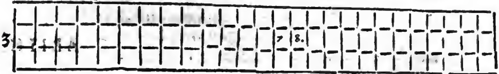
Iam ultimo multiplicato per numerum rationis exit rectangulum, cuius unum latus 3: alterum 27.

27.

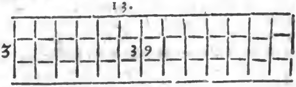


Rursus subtracto numero primo à rectangulo exit rectangulum, cuius unum latus 3, alterum 26: area 78.

26.



Tandem diuisa area per duo prodit rectangulum, cuius unum latus 3, alterum 13, area 39.



Rectangulum igitur descriptum à numero primo & 13 est summa numerorum datæ progressionis. Ex quo apparet summam colligi ducendo primum numerum in latus ultimi rectanguli.

9. In omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorũ est impar, numerus qui fit ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium producetur, nec nõ numero, qui ex medio in seipsum fit: ut hic.

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128

256

256

256

10. Eadem est ratio in numero pari, hoc solum excepto, quod hic non est unicus numerus medius sed duo. Sumendi igitur quatuor numeri medij, non autem tres tantum, ut prius: ut hic.

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256

512

512

512

512

ARITHMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ

LIBER QVARTVS.

DE NVMERO FIGVRATO.

DEFINITIONES.

1. Numerus figuratus est, qui per figuras & appellationes Geometricas exprimitur. Hinc Geometricum quidam vocant. Græci σχηματικόν.

2. Est autem duplex: alius absolutus, alius cossicus. Absolutus rursus aut planus, aut solidus.

3. Planus dicitur, qui per suas unitates ita disponitur, ut superficiei alicuius imaginem repræsentet: quæ in longum & latum extenditur. Fit autem vel ex additione, vel ex multiplicatione.

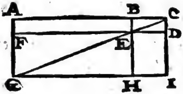
Ex additione fiunt trigoni, pentagoni, hexagoni, de quibus Arithmetica Euclidis nihil docet. Neque enim respondent figuris Geometricis, ut supra lib. 3. diximus, & probat Stifelius lib. 1. cap. 3. Figuræ illorum sunt hæ.



Ex mulltiplicatione qui fit, iterum duplex est: aut ex duobus æqualibus procreatus, ut quadratus: aut ex duobus inæqualibus, ut sunt oblongi & pleraque supplementa.

Oblongi sunt quadranguli, qui inter binos verè quadratos ponuntur, ut 20, 24, 32, suntque non verè quadrati, ab Arithmeticis surdi appellati, quòd radix illorum tam vera nunquam reperitur, quin vero propior possit reperiri: qua de causa ἄῤῥητοι appellantur, quod numero explicari nequeunt, sed solum per lineam.

4. Supplementa sunt duo rectangula, per quæ diameter non transit: si in rectangulo diameter ducta fuerit: duæque lineæ lateribus parallelæ secent diametrũ in uno eodemq; puncto: ut rectangulum ab hisce parallelis in quatuor rectangula distribuatur: ut in *præsenti figura*, duo rectangula *ae*, & *ei*, per quæ diameter *cg* non transit, vocantur supplementa reliquorum duorum *bd* & *fh*, quæ dicuntur circa diametrum consistere, cum per ea diameter transeat; suntque duplicia, quadrata & oblonga, de quibus hoc in loco. Quadrata oriuntur ex latere in seipsum ducto: oblonga ex latere longitudinis in latus latitudinis ducto.



5. Solidus dicitur, qui & longitudinem & latitudinem & crassitiem habet: & suis unitatibus in longum, latum & profundum disponitur. Fit autem similiter ut planus, aut ex additione, aut ex multiplicatione.

Ex additione fit pyramis, de qua nihil Euclides, eam ob causam, quam supra de polygonis planis diximus.

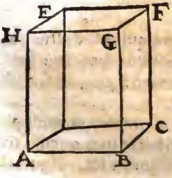
6. Ex multiplicatione qui fit, iterum duplex est, aut ex tribus æqualibus, ut cubicus, & compositus ex quadratis & cubis, ut quadratoquadratũ, relatum primum, quadratocubus, relatum secundum, & sic in infinitum: aut ex inæqualibus, ut numerus non verè cubicus, compositusúe non

ex veris

ex veris cubis & quadratis, & pleraque parallelepipeda.

Numeri non vere cubici, respondent planis oblongis: ut parallelepipeda supplementis.

7. Parallelepipedum est figura solida sex planis comprehensa, estque duplex, cubicum & non cubicum. Cubicum sex planis quadratis constat: non cubicum, quod sex planis comprehenditur, quorum duo opposita sunt æqualia, similia, parallela: reliqua vero parallelogramma: ut figura solida *abcdefgh*: in qua tàm duo plana opposita *abcd*, *efgh*, quàm duo *adeh*, *befg*, & duo *abgh*, *dcfe* parallelogramma sunt inter se parallela. Alij prisma & planosolidum vocant.



Sic 36 est numerus non verè cubicus, quem faciunt ter quatuor ter: & 96, quem faciunt quater sex quater.

8. Multiplicans numerus dicitur latus & costa Geometricè: Græcis πλευρὰ, & πυθμὴν. Arithmeticis radix μεταφορικῶς. Vt enim plantæ ex radicibus oriuntur: sic plani & solidi numeri ex radice surgunt.

9. Procreatus dicitur potestas, Græcis δύναμις. Est enim numerus non μήκει seu longitudine, sed δύναμει: ut διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς. Et Pythagoricum inuentum, ὅτι τριγώνου ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα ἰσοδυναμεῖ, ἤγουν, ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις.

10. Radix tot species habet, quot numerus, quem procreat. Est igitur radix alia planorum, alia solidorum. Planorū rursus alia quadrata, alia oblonga. Solidorum similiter alia cubica, alia parallelepipeda, quorum subdiuisio supra habetur.

11. Rursus radix alia est vera, alia non vera: illam rationalem: hanc irrationalem vocant. Et alia simplex: alia duplex. Simplex est verè quadratorum & cubicorum: duplex oblongorum & parallelepipedorum.

12. Numerus quadratus dicitur, quòd in unitates solutus, longitudinem latitudini æqualem habeat, instar quadrati Geometrici: Euclidi ἰσάκις ἴσος, id est, æquè æqualis. Appellant & censum, & primam quantitatem, quod ex radice, ut ex sorte census oritur: & prima est omnium, quæ ex radice nascuntur. Gignitur autem ex radice bis posita sic. 2, 2, bis duo. 3, 3, ter tria. Figura illius in numeris est hæc.

o o o
9. o o o
o o o

13. Radix quadrata dicitur numerus, qui in se ductus quadratum numerum constituit: Geometricè latus quadrati: ut ternarius est radix quadrata nouenarij: quia 3 in se ducta faciunt 9.

14. Numerus oblongus est, qui non creatur ex multiplicatione numeri unius, sed duorum in se: ut 12, quem faciunt ter quatuor. Sic 24, quem faciunt quater sex. Figurà illius in numeris est hæc.

o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o

15. Radix unica, eaque vera & propria oblongi nulla est: quadrato autem quàm proximè similis extrahi potest. Vera, eaque propria, sunt duo nùmeri, quorum unus est multiplicans, alter multiplicandus. Geometricè latus longitudinis, & latus latitudinis.

16. Numerus cubicus est, qui ex numeri cuiusuis in se, & eiusdem

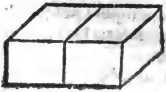
eiusdem in productum multiplicatione componitur. Euclidi ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, æquè æqualis æquè: sic dictus propter affinitatem, quam cum Geometrico cubo habet. Vt enim hic ex duplici fluxu, uno lineæ, altero quadrato superficiei oritur: ita numerus cubicus ex secūdaria numeri multiplicatione prodit. Appellant & secundam quantitatē, quia gignitur ex radice ter posita, ita ut duæ multiplicationes fiant sic 2,2,2, bis duo bis, id est, 8. Et, 3, 3, 3, ter tria ter, id est, 27.

Schema in numeris, idem est quod in quadrato supra posito, in quo tres superficiales quadratos sibi retro impositos imaginari necesse est, ut cubum habeas. Schema in lineis habetur infra in extractione radicis cubicæ.

o o o
27. o o o
o o o

17. Radix cubica est numerus, qui in se bis ductus cubum constituit: ut 2 est radix cubica octonarij, eò quòd bis in se ducta octo constituunt. Sic enim dicimus. Bis duo sunt 4. & bis 4 sunt 8.

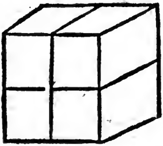
18. Radix parallelepipedi non verè cubici unica, eaque vera & propria nulla est: cubicæ autem quàm proximè similis extrahi potest. Vera, eaque propria sunt tres numeri, quorum unus est longitudo: alter latitudo: tertius profunditas.



19. Quadratoquadratum est numerus quatuor laterum, qui nascitur ex quadrata multiplicatione quadrati, ut 16. Sic enim dicimus. Bis 2 sunt 4, & quater 4 sunt 16. Vocant & censicensum: & biquadratum & tertiam quantitatem. Huius figura in lineis est sic. 20. Ra-

20. Radix quadratiquadrata est numerus, cuius quadratus seipsum multiplicat: vel, numerus quater positus & in se ductus: ut 2 est radix quadratiquadrata 16. quia quadratum 2 est 4. & quadratum 4 est 16. vel quia 2,2,2,2, facit 16.

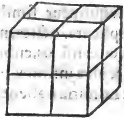
20. Relatum primum est numerus quinque laterum, qui fit ex quadrato in cubum ducto: ut 32 est relatum primum de 2. Nam quadratum binarij est 4: cubus 2 est 8: iam 4 in 8 ducta faciunt 32: vel, in quo quinaria fit multiplicatio: ut 32 est relatum primum, quia 2,2,2, 2, 2, facit 32. Diophantus vetus autor, & recentior Fr. Viëta vocat quadratocubum, quod nomen alij tribuunt numero, qui fit ex cubo in seipsum ducto. Arithmetici alio nomine vocant & supersolidum & surdesolidum: vel rectius, surdum solidum: & altera parte longius. Nam quantum attinet ad radicem quadratam est surdus: suæ tamen speciei radicem habet, id est, surdesolidam. Solidum autem vocant, quasi altera post cubum multiplicatione solidatum. Figura est hæc.



21. Radix relati primi est numerus quinquies positus, & in se ductus: ut radix surdesolida 32 est 2. Nam bis 2 sunt 4, bis 4 sunt 8, bis 8 sunt 16: bis 16 sunt 32.

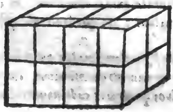
22. Quadrati cubicus est quadratus cubicè multiplicatus, ut

ut 64. Nam quadratum binarij est 4, qui cubicè multiplicatus facit 64. Alij vocant censicubicum. Figura est hæc.



23. Radix quadraticubica est, numerus sexies positus, & in se ductus, ut radix quadraticubica 64 est 2. Nam bis duo sunt 4: bis 4 sunt 8: bis 8 sunt 16; bis 16 sunt 32: bis 32 sunt 64, sic 2, 2, 2, 2, 2, 2.

24 Relatum secundum est numerus factus ex numero septies posito, ut 128. Nam bis 64 sunt 128. Est igitur relatum secundum in dupla progressione nihil aliud quàm duplicatus censicubus: in tripla triplicatus, & sic deinceps. Arithmetici rudius bsurdesolidum vocant, & supersolidum secundum, & sursolidum secundum: eò quod ratione radicis quadratæ surdus esse inuenitur: (rarò enim radicem habet quadratam, ut censicensus habet) licet aliam habeat, nempe bsurdesolidam. Bsurdesolidus autem appellatur, quod constet ex binis surdesolidis. Figura est hæc.



Probatio per abiectionem nouenarij ipso opere prolixior est. Perficitur autem sic. Aufer nouenarium, vel septenarium à singulis proportionalibus numeris, quoties poteris: deinde multiplica residuos, si qui fuerint, inter se: primi videlicet residuum cum residuo quarti: & secundi postea cum residuo tertij numeri: tum ablato ex ambobus productis probæ numero quoties fieri poterit: si reliqui duo numeri inter se æquales fuerint, te non errasse scias. V. G. in præcedenti exemplo, numeri proportionales sunt, 8. 6. 20. 15. Probæ numero de singulis remoto, numeris primo & tertio: secundo item & quarto, residuum primi est 8: secundi 6: tertij 2, quarti 6. Iam ductis residuis primi & quarti inter se prouenit 48: residuis secundi & tertij prodit 12. Rursus probæ numero ablato à 48, residuum est tria. Eodem ablato à 12, remanet idem 3.

Si numerus ex ductu primi in quartum genitus fuerit æqualis numero ex ductu secundi in tertium nato, operationem veram: sin minus, falsam arguet.

Si ratio primi numeri ad secundum & tertij ad quartum: vel permutatim, ratio primi ad tertium, & secundi ad quartum eadem fuerit, verum opus: sin minus falsum, iudicandum est.

ADDITIO NVM. PROGR. GEOM.

Πρότασις. Numeros progressionis Geometricæ breuiter addere.

Ἐκθ. *Sint numeri progressionis Geometricæ, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.*

Δ. Oportet *datos hos numeros in unam summam breuiter colligere.*

Κατ. *1. Subtrahe primum terminum totius progressionis à secundo & ultimo. Excessus secundi supra primum vocetur residuum minus. Excessus ultimi supra primum vocetur residuum maius. 2. Iam ut residuum minus ad primum terminum: ita residuum maius ad quartum. Operare igitur secundum regulam auream: ut quartum proportionalem inuenias. 3. Quartus inuentus additus cum ultimo termino, summam quæsitam indicat: ut in dato exemplo progressionis duplæ 2 à 4: & 2 à 128 remanent 2 & 126. Numerus pri-*

rus primus est 2. Residuum minus 2. Residuum maius 126. Iam sic dispono terminos: ut se habent 2 ad 2: sic 126 ad quartum. Facta supputatione quartus proportionalis emergit 126: qui additus ultimo termino facit 254.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico summam omnium septem numerorum datorum esse 254.*

'Απόδειξις.

35 noni. Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo & ultimo aquales ipsi primo: erit ut secundi excessus ad primum: ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Hic sunt septem numeri continuè proportionales 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128: & ex 4 secundo: & 128 ultimo detraho 2 numerum primum: & remanent 2 & 126.

Ergo ut 2 ad 2: ita 126 ad summam omnium, excepto ultimo, qui si addatur summa inuenta 126 procreabitur summa omnium 254, hoc modo.

126
128
———
254.

σχόλιον.

1. Progressio est numerorum plurium per æquales excessus, vel certarum differentiarum rationes ordinata successio. Vel, numerorum proportionalium continuatio. Germ. auffsteigung. Quæ per æquales excessus progreditur, Arithmetica dicitur: quæ rationes differentiarum obseruat, Geometrica appellatur.

2. Additio in Arithmeticis progressionibus respondet multiplicationi in Geometricis: ut sicut in hac Arithmetica progressione 3. 7. 11. 15. duo termini extremi additi faciunt, quantum medij ad se additi. Vtrobique enim fiunt 18. Sic in hac Geometrica 3. 6. 12. 24, duo extremi inter se multiplicati faciunt, quantum medij inter se multiplicati. Vtrobique enim fiunt 72. Et sic in alijs.

3. Progressio Geometrica, ut & proportio, alia continua, alia disiuncta: & rursus disiuncta alia simplex, alia multiplex. Simplex constat quatuor terminis. Multiplex, pluribus.

4. Rursus

4. Rursus progresſio tot ſpecies habet, quot ratio. Incedit igitur ſub ratione dupla, tripla, quadrupla, quintupla, & ſic deinceps.

Dupla,	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
Tripla,	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.
Quadrupla,	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.
Quintupla,	5.	25.	125.	625.	3125.	15725.	72625.

5. Continuo ordine creſcentes inueniuntur omnes multiplicatione poſtremi termini per nomen rationis extendendæ: ut in primo præcedente exemplo proportio dupla eſt: multiplicato igitur poſtremo termino per 2. conſequenter efficies plures ſic. 128, 256. 512. & ſic deinceps.

6. Pari ratione progreſsio Geometrica continuatur retrocedendo, ſi minus extremum per denominatorem proportionis diuidatur: ut ſi progreſsio hæc 243. 729. 2187. continuanda ſit verſus minores numeros, cum denominator proportionis ſit tria 3. diuides 243 per 3, facieſque 81, quæ rurſus partieris per 3, inuenieſq; 27, & ſic deinceps in infinitum.

7. Optati termini inueniuntur hoc modo. Datis aliquot continuæ proportionis terminis ſubſcribe terminos Arithmeticæ progreſsionis naturali ordine progrediétes ſub primo 0, deinde 1, 2, 3, 4, 5, &c. Adde poſtea tot characteres, quot ſummam optatorum terminorũ conſtituunt: & ſupra ſcriptos duos Geometricos multiplica, unum in alterum: procreatum diuide per primum, & quotus erit ſuæ progreſsionis terminus uno maior, quàm eſt totus ex numeris Arithmeticæ progreſsionis multiplicatis reſpondentibus: ut ſint dati in progreſsione dupla octo numeri ab unitate incipientes. Ex datis his terminis inueniri poſſunt optati quotlibet. Subſcribo autem alios characteres ſic.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Iam cupio decimum tertium. Hinc ſic inuenero: ſi datorum terminorum ultimum multiplicauero per penultimum, ſcilicet 64 per 128. Ex hoc ductu oritur numerus 8192, decimo tertio loco collocandus, eò quod ſub uno horum ſeptem: ſub altero ſex notantur, qui numeri iuncti 13 efficiunt. Rurſus 8192 in ſeipſum multiplico & productum 67108864 viceſimo ſexto loco colloco. Bis enim tredecim efficiunt 26. Quod ſi trigeſimum cupiam, multiplico viceſimo ſexto loco poſitum per eum, cui ternarius ſubſcriptus eſt, & producetur 536870912. Occupat aut̃ 29 locum trigeſimũ, quia ſub primo numero 0 ponitur. Hoc cõpendio utimur maximè in addi

in additione multorum terminorum euitandi tædiosi laboris gratia, ne sit necesse singulos intermedios duplicare, cum extremorũ tantum notitia ad illam operationem sit necessaria.

8. Modus addendi numeros progressionis Geometricæ alius est prolixior: alius breuior. Prolixior est, cuius demõstratio supra proposita est. Breuior est hic. Vltimum numerum multiplica per numerum rationis: à producto aufer primum numerum: quod reliquũ est, diuide per numerum unitate minorem, quàm est is, per quem facta est multiplicatio. E. G. Sit colligenda summa numerorum in dupla ratione, quæ ab unitate ad tricesimum usque terminum progreditur. Hanc sic inquiro. Postremum terminum per duo multiplico: proueniunt 1073741824. Hinc aufero unitatem, quod restat manet est vera summa totius progressionis. Nam quod præcipitur, ut productum ex multiplicatione ultimi termini rursus diuidatur per numerum proximè minorem eo, per quem facta est multiplicatio, id hic locum non habet, quia numerus minor binario dari non potest. Vnitas autem non diuidit, nec multiplicat.

Demonstratio huius supputationis Geometricæ in numeris tribus. Sint tres numeri 3. 9. 27, quorum summa quæritur. Ordo illorum est hic.

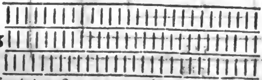
3
9
27



Iam ultimo multiplicato per numerum rationis exit rectangulum, cuius unum latus 3: alterum, 27.

27.

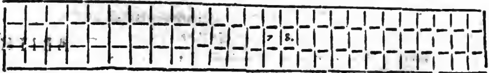
3



Rursus subtracto numero primo à rectangulo exit rectangulum, cuius unum latus 3, alterum 26: area 78.

26.

3



T Tandem

ARITHMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ

LIBER QVARTVS.

DE NVMERO FIGVRATO.

DEFINITIONES.

1. Numerus figuratus est, qui per figuras & appellationes Geometricas exprimitur. Hinc Geometricum quidam vocant. Græci σχηματικόν.

2. Est autem duplex: alius absolutus, alius cossicus. Absolutus rursus aut planus, aut solidus.

3. Planus dicitur, qui per suas unitates ita disponitur, ut superficiei alicuius imaginem repræsentet: quæ in longum & latum extenditur. Fit autem vel ex additione, vel ex multiplicatione.

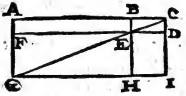
Ex additione fiunt trigoni, pentagoni, hexagoni, de quibus Arithmetica Euclidis nihil docet. Neque enim respondent figuris Geometricis, ut supra lib. 3. diximus, & probat Stifelius lib. 1. cap. 3. Figuræ illorum sunt hæ.



Ex mulltiplicatione qui fit, iterum duplex est: aut ex duobus æqualibus procreatus, ut quadratus: aut ex duobus inæqualibus, ut sunt oblongi & pleraque supplementa.

Oblongi sunt quadranguli, qui inter binos verè quadratos ponuntur, ut 20, 24, 32: suntque non verè quadrati, ab Arithmeticis surdi appellati, quòd radix illorum tam vera nunquam reperitur, quin vero propior possit reperiri: qua de causa ἄῤῥητοι appellantur, quod numero explicari nequeunt, sed solum per lineam.

4. Supplementa ſunt duo rectangula, per quæ diameter nõ tranſit: ſi in rectangulo diameter ducta fuerit: duæque lineæ lateribus parallelæ ſecent diametrũ in uno eodemq; puncto: ut rectangulum ab hiſce parallelis in quatuor rectangula diſtribuatur: ut in *præſenti figura*, duo rectangula *a e*, & *e i*, per quæ diameter *c g* non tranſit, vocantur ſupplementa reliquorum duorum *b d* & *f b*, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, cum per ea diameter tranſeat: ſuntque duplicia, quadrata & oblonga, de quibus hoc in loco. Quadrata oriuntur ex latere in ſeipſum ducto: oblonga ex latere longitudinis in latus latitudinis ducto.



5. Solidus dicitur, qui & longitudinem & latitudinem & craſſitiem habet: & ſuis unitatibus in longum, latum & profundum diſponitur. Fit autem ſimiliter ut planus, aut ex additione, aut ex multiplicatione.

Ex additione fit pyramis, de qua nihil Euclides, eam ob cauſam, quam ſupra de polygonis planis diximus.

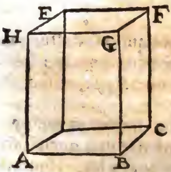
6. Ex multiplicatione qui fit, iterum duplex eſt, aut ex tribus æqualibus, ut cubicus, & compoſitus ex quadratis & cubis, ut quadratoquadratũ, relatum primum, quadratocubus, relatum ſecundum, & ſic in infinitum: aut ex inæqualibus, ut numerus non verè cubicus, compoſitusúe non

ex veris

ex veris cubis & quadratis, & pleraque parallelepipeda.

Numeri non vere cubici, respondent planis oblongis: ut parallelepipeda supplementis.

7. Parallelepipedum est figura solida sex planis comprehensa, estque duplex, cubicum & non cubicum. Cubicum sex planis quadratis constat: non cubicum, quod sex planis comprehenditur, quorum duo opposita sunt æqualia, similia, parallela: reliqua vero parallelogramma: ut figura solida *abcdefgh*: in qua tàm duo plana opposita *abcd*, *efgh*, quàm duo *adeh*, *bcfg*, & duo *abgh*, *dcfe* parallelogramma sunt inter se parallela. Alij prisma & planosolidum vocant.



Sic 36 est numerus non verè cubicus, quem faciunt ter quatuor ter: & 96, quem faciunt quater sex quater.

8. Multiplicans numerus dicitur latus & costa Geometricè: Græcis πλευρὰ, & πυθμὴν. Arithmeticis radix μεταφορικῶς. Vt enim plantæ ex radicibus oriuntur: sic plani & solidi numeri ex radice surgunt.

9. Procreatus dicitur potestas, Græcis δύναμις. Est enim numerus non μήκει seu longitudine, sed δυνάμει: ut διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς. Et Pythagoricum inuentum, ὅτι τριγώνου ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα ἰσοδυναμεῖ, ἤγουν, ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις.

10. Radix tot species habet, quot numerus, quem procreat. Est igitur radix alia planorum, alia solidorum. Planorũ rursus alia quadrata, alia oblonga. Solidorum similiter alia cubica, alia parallelepipeda, quorum subdiuisio supra habetur.

11. Rursus radix alia est vera, alia non vera: illam rationalem: hanc irrationalem vocant. Et alia simplex: alia duplex. Simplex est verè quadratorum & cubicorum: duplex oblongorum & parallelepipedorum.

12. Numerus quadratus dicitur, quòd in unitates solutus, longitudinem latitudini æqualem habeat, instar quadrati Geometrici: Euclidi ἰσάκις ἴσος, id est, æquè æqualis. Appellant & censum, & primam quantitatem, quod ex radice, ut ex sorte census oritur: & prima est omnium, quæ ex radice nascuntur. Gignitur autem ex radice bis posita sic. 2, 2, bis duo. 3, 3, ter tria. Figura illius in numeris est hæc.

o o o
9. o o o
o o o

13. Radix quadrata dicitur numerus, qui in se ductus quadratum numerum constituit: Geometricè latus quadrati: ut ternarius est radix quadrata nouenarij: quia 3 in se ducta faciunt 9.

14. Numerus oblongus est, qui non creatur ex multiplicatione numeri unius, sed duorum in se: ut 12, quem faciunt ter quatuor. Sic 24, quem faciunt quater sex. Figura illius in numeris est hæc.

o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o

15. Radix unica, eaque vera & propria oblongi nulla est: quadrato autem quàm proximè similis extrahi potest. Vera, eaque propria, sunt duo numeri, quorum unus est multiplicans, alter multiplicandus. Geometricè latus longitudinis, & latus latitudinis.

16. Numerus cubicus est, qui ex numeri cuiusuis in se, &

eiusdem in productum multiplicatione componitur. Euclidi ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, æquè æqualis æquè: sic dictus propter affinitatem, quam cum Geometrico cubo habet. Vt enim hic ex duplici fluxu, uno lineæ, altero quadrato superficiei oritur: ita numerus cubicus ex secūdaria numeri multiplicatione prodit. Appellant & secundam quantitatē, quia gignitur ex radice ter posita, ita ut duæ multiplicationes fiant sic 2,2,2, bis duo bis, id est, 8. Et, 3, 3, 3, ter tria ter, id est, 27.

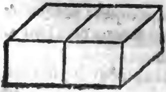
Schema in numeris, idem est quod in quadrato supra posito, in quo tres superficiales quadratos sibi retro impositos imaginari necesse est, ut cubum habeas. Schema in lineis habetur infra in extractione radicis cubicæ.

o o o
27. o o o
o o o

17. Radix cubica est numerus, qui in se bis ductus cubum constituit: ut 2 est radix cubica octonarij, eò quòd bis in se ducta octo constituunt. Sic enim dicimus. Bis duo sunt 4. & bis 4 sunt 8.

18. Radix parallelepipedi non verè cubici unica, eaque vera & propria nulla est: cubicæ autem quàm proximè similis extrahi potest. Vera, eaque propria sunt tres numeri, quorum unus est longitudo: alter latitudo: tertius profunditas.

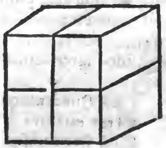
19. Quadratoquadratum est numerus quatuor laterum, qui nascitur ex quadrata multiplicatione quadrati, ut 16. Sic enim dicimus. Bis 2 sunt 4, & quater 4 sunt 16. Vocant & censicensum: & biquadratum & tertiam quantitatem. Huius figura in lineis est sic.



20. Ra-

20. Radix quadratiquadrata est numerus, cuius quadratus seipsum multiplicat: vel, numerus quater positus & in se ductus: ut 2 est radix quadratiquadrata 16. quia quadratum 2 est 4. & quadratum 4 est 16. vel quia 2,2,2,2, facit 16.

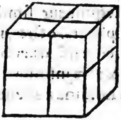
20. Relatum primum est numerus quinque laterum, qui fit ex quadrato in cubum ducto: ut 32 est relatum primum de 2. Nam quadratum binarij est 4: cubus 2 est 8: iam 4 in 8 ducta faciunt 32: vel, in quo quinaria fit multiplicatio: ut 32 est relatum primum, quia 2,2,2, 2, 2, facit 32. Diophantus vetus autor, & recentior Fr. Viëta vocat quadratocubum, quod nomen alij tribuunt numero, qui fit ex cubo in seipsum ducto. Arithmetici alio nomine vocant & supersolidum & surdesolidum: vel rectius, surdum solidum: & altera parte longius. Nam quantum attinet ad radicem quadratam est surdus: suæ tamen speciei radicem habet, id est, surdesolidam. Solidum autem vocant, quasi altera post cubum multiplicatione solidatum. Figura est hæc.



21. Radix relati primi est numerus quinquies positus, & in se ductus: ut radix surdesolida 32 est 2. Nam bis 2 sunt 4. bis 4 sunt 8, bis 8 sunt 16: bis 16 sunt 32.

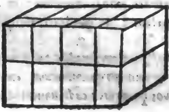
22. Quadrati cubicus est quadratus cubicè multiplicatus, ut

ut 64. Nam quadratum binarij est 4, qui cubicè multiplicatus facit 64. Alij vocant censicubicum. Figura est hæc.



23. Radix quadraticubica est numerus sexies positus, & in se ductus, ut radix quadraticubica 64 est 2. Nam bis duo sunt 4: bis 4 sunt 8: bis 8 sunt 16: bis 16 sunt 32: bis 32 sunt 64, sic 2, 2, 2, 2, 2, 2.

24 Relatum secundum est numerus factus ex numero septies posito, ut 128. Nam bis 64 sunt 128. Est igitur relatum secundum in dupla progressione nihil aliud quàm duplicatus censicubus: in tripla triplicatus, & sic deinceps. Arithmetici rudius bsurdesolidum vocant, & supersolidum secundum, & sursolidum secundum: eo quod ratione radicis quadratæ surdus esse inuenitur: (raro enim radicem habet quadratam, ut censicensus habet) licet aliam habeat, nempe bsurdesolidam. Bsurdesolidus autem appellatur, quod constet ex binis surdesolidis. Figura est hæc.



25. Radix relati secundi est numerus septies positus, & in se ductus: ut radix 128 bsurdesolida est 2, hoc modo. 2,2,2,2,2,2,2.

Cæteræ species quæ sequuntur similiter creantur ex radice continenter multiplicata, octies, nouies, decies, & sic deinceps, ut sunt censicencensicus, cubicubus, censurdesolidus, relatum tertium, & aliæ infinitæ, propriè ad numerum cossicum pertinent: & nomina habent aspera: usum nullũ.

AXIOMATA DE EXTRACTIONE RADICVM.

1. Extractio radicis est inuentio radicis, id est, numeri, qui multiplicatione aliqua numerum, propositum producit, ex dato numero.

2. In extractione radicum ea est ratio dati numeri ad radicem, quæ radicis ad unitatem. Est igitur radix media proportionalis inter unitatem & numerum datum: ut radix quadrata de 144 est 12. Vt enim 144 ad 12: sic 12 ad 1.

3. Extractio radicum cognata est diuisioni, eò quod utraq; diuisore utitur, sed diuersis modis. In diuisione enim datur diuidendus cum diuisore: eoq; uno eodemq; in singulis operationibus: in extractione radicum tantum unus numerus datur, & diuisor inquiritur: isq; in singulis operationibus peculiaris. Et numeri in diuisione uel tres, uel quatuor sunt ἀνάλογοι dispositi κατὰ διῃρημένην ἀναλογίαν: in extractione radicum tres tantum κατ' ἀναλογίαν συνεχῆ. V. G. ἀναλογία διῃρημένη in diuisione est hæc, 144. 12. 12. 1. συνεχὴς in extractione radicum est hæc, 144. 12. 1.

4. In extractionibus radicum obseruanda est primùm distinctio numeri propositi per puncta, sicut primus signetur: deinde progrediendo à dextris ad leuam intermittatur in quadrata extractione unus: in cubica duo: in biquadrato tres: in sursolido quatuor: in quadraticubo quinq;: in bsurdesolido sex: & sic in ceteris.

5. Respondent autem hæ signationes mediis proportionalibus, & numeris progreßionis Geometricæ & numero quantitatum, ex quot unumquodq; nomen constat. Nam inter duos quadratos cadit unus medius: inter duos cubos

duo me-

duo medij, & sic de cæteris. Et in progreßione ab unitate incipiente tertius ab unitate terminus est quadratus: quartus cubus: quintus censicubus: sextus surdesolidus: septimus censicubus: octauus bsurdesolidus, & sic deinceps. 8. prop. lib. 9. Primum autem punctum unitatem designat. Et unumquodq; nomen tot ordines intermissos habet, quot ipsum dimensionibus uel quantitatibus est constatum.

6. Radix cuiuslibet numeri tot habet figuras, quot puncta sub ipso signata sunt. Quadratus igitur, u. g. constans ex duabus figuris habet radicem unius figuræ: constans tribus, duas, & sic deinceps. Duæ enim tantum unum punctum: tres duo puncta supra scripta habent.

7. Characteres puncti uocantur numeri uel characteres pertinentes ad punctum: ut sit numerus, è quo radix quadrata extrahenda est, 8 7 2 3 5 6: hic 56 sunt characteres primi puncti: 23 secundi: 87 ultimi. Sit idem numerus cubicus, è quo radix sit extrahenda: erunt characteres primi puncti 356: ultimi 872.

8. Vltimi puncti characterum radix primum reperitur uel per multiplicationem: uel per tabellam sequentem.

Radices.	Quadrati.	Cubici.	Censicensici.	Quadratocubi surdesolidi.	Censicubi.	Bsurdesolidi.
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	78125	279936
7	49	343	2401	16807	279936	823543
8	64	512	4096	32768	1679616	2097152
9	81	729	6561	59049	10077696	4782969
10	10C	1000	10000	100000	1000000	10000000.

Ex hac igitur tabella sumitur radix characterum ultimi puncti, ea quam quærimus: ut 2 est radix 4: cubica 8: censicensica 16: surdesolida 32: censicubica 64: bsurdesolida 128: & sic de alijs.

9. Radix inuenta seorsum notatur post semicirculum, & quadratum ipsius sub figuram puncto notatam scriptum subtrahitur à figura infra punctum posita: residuum si quod fuerit, spectabit ad characteres sequentis puncti.

10. Pro extractione radicum reliquarum, si puncta plura adsunt, nouus diuisor inquirendus est uel per analysin siue Arithmeticam, siue Geometricam, uel per numeros absolutos Stifelij.

Analysis Arithmetica tot in omni numero constituit multiplicationes, quot numerus datus constituitur. Cum igitur quadratus una multiplicatione producatur, fit una multiplicatio, in qua duplum radicis sumitur: cùm cubus duabus multiplicationibus producatur, fiunt duæ multiplicationes. Primum enim sumitur triplum: & deinde duplum agitur in tripli dimidium: aut radix in triplum. Cùm quadrati quadratum tribus multiplicationibus producatur, fiunt tres multiplicationes. Primùm enim quadruplum radicis accipitur, & quod producitur ex multiplicatione tripli radicis in quadrupla dimidium cum eo quod prodit ex ductu radicis duplæ in trientem eius, quod postrema multiplicatione est productum: in surdesolidi radice, quæ quater accipitur, sumitur quintuplum: & radicis quadruplum ducitur in quintupli dimidium: eius triplum in illius producti trientem: aut totum in totum: insuperq; eius duplum in huius postremi producti quadrantem, aut dimidium in totum: & sic in alijs.

Duplum autem radicis in extractione radicis quadratæ sumitur, quia in generatione quadrati, bini numeri inæquales (interdum & æquales) in se ducuntur: triplum in extractione radicis cubicæ, quia in generatione cubi terni numeri inæquales, (interdum æquales) in se ducuntur: duplum autem agitur in triplum, quia radix quadrata ducitur in quadratum. Sic quadruplum & quintuplum in extractione radicum quadratoquadrati, & sursolidi, ob similem rationem. Et sic in alijs.

Analysis Geometrica in tot partes latus uniuersum diuidit, quot puncta totus numerus uel quot characteres tota radix continet. Quadratus autem omnis compositus à duobus lateribus singularibus constat quadrato lateris primi, plus plano à duplo lateris primi in secundum: plus quadrato lateris secundi. Hinc numerus pro radice quadrata est, 1 ȝ ✠ 2 R ✠ 1, Stifelio 20 tantum.

Quod

Quod si plura quàm duo puncta fuerint, quadratum intelligitur ab initio componi tantum à duobus illis lateribus, quibus inuentis illa duo funguntur postea uice unius: intelligenturq; componi ex illo aggregato, tanquam primo latere, & sequente ut secundo, eoq; in infinitum continuo ordine.

Cubus omnis compositus à duobus lateribus singularibus constat cubo lateris primi plus solido à triplo lateris primi in quadratum secundi: plus solido à triplo quadrato lateris primi in latus secundum: plus cubo lateris secundi. Hinc numerus pro radice cubica est 1 ℭ ✠ 3 ʓ ✠ 3 ℞ ✠ 1. Stifelio 300. 30 Quod si plura supersunt puncta, eadem ut ante resolutionis forma retinetur, eò quod duo pro uno postea intelliguntur: cui tertium, quod pro secundo iam habetur, adiungitur, & sic deinceps.

Quadratiquadratum compositum à duobus singularibus lateribus constat quadrati quadrato lateris primi, plus latere secundo in cubum quadruplum lateris primi.

Plus lateris secundi quadrato in quadratum sextuplum lateris primi.

Plus lateris secundi cubo in latus quadruplum primi.

Plus lateris secundi quadratiquadrato.

Hinc numerus pro radice censicensica est 1 ʓʓ, ✠ 4 ℭ ✠ 6 ʓ ✠ 4 ℞ ✠ 1. Stifelio tres numeri 4000, 600, 40. Quod si plura supersunt puncta, duo pro uno sumuntur & tertium pro altero ponitur.

Sursolidus compositus à duobus singularibus lateribus constat sursolido lateris primi:

Plus latere secundo in quadratoquadratum quintuplum lateris primi.

Plus lateris secundi quadrato in cubum decuplum lateris primi.

Plus lateris secundi cubo in quadratum decuplum lateris primi.

Plus lateris secundi quadratiquadrato in latus primum quintuplum.

Plus sursolido lateris secundi.

Hinc numerus pro radice sursolida est 1 ꞵ ✠ 5 ʓʓ ✠ 10 ℭ ✠ 10 ʓ ✠ 5 ℞ ✠ 1. Stifelio quatuor numeri, 50000, 10000, 1000, 50. Quod si plura supersint puncta: duo pro uno sumuntur, & tertium pro altero habetur.

11. Collocatio productorum ex multiplicationibus est haec. Multiplex radicis statuatur inter proxima duo puncta, sub figura proxima puncto, à dextris inchoando prosequendoq; uersus leuam singulorum stationem. Nam sub secunda productum secundum statuatur: sub tertia tertium: & sic consequenter, si plures multiplicationes factae fuerint.

12. *Quæritur quoties inuentus diuisor in superiore reperiatur: quotus hic adscribatur priori uersus dextram.*

13. *Vt numerum auferendum habeas, quoti sume quantitatem, cuius radicem inuestigasti: cubum si cubicam: sursolidum si sursolidam, & proximam quantitatem minorem multiplica in numerum primum: hac proximè minorem duc in secundum: & hac proximè minorem in tertium, persequendo hanc rationem, donec ad numerum diuisorem deuentum est, quem in ipsum quotum multiplica: numerosq; productos ita colloca, antequam addas, ut semper numerus posterior ex multiplicatione proueniens subijciatur priori una nota ulterius uersus læuam.*

14. *Hunc in modum positos adde: deinde subtrahe: primum à numero, qui puncto superstat: secundum ab eo, qui puncto uersus læuam est proximus, & à reliquis reliquos eodem ordine.*

15. *Facta subductione, ut rursus reperias diuisorem, si plura puncta supersint, repetenda sunt, quæ de diuisoris inuentione superiùs sunt tradita; eoq; inuento, & reperto quoto numerum subducendum reperies modo iam explicato.*

16. *Si peracta subtractione, superfit aliquid: argumentum est magnitudinis resoluendæ latus esse irrationale: siue numerum datum non esse uerè talem, qualis proponebatur. Inuento igitur lateri fractio addenda, cuius numerator est residuum: diuisores ijdem, qui essent, si aliquod punctum superesset resoluendum: & talis fractio facit latus maius uero. Et si denominatori addatur unitas, facit minus uero. In diuisoribus enim inest implicitè latus, quod alioquin proximè esset eliciendum.*

18. *Productum duarum radicum est æquale radici extractæ ex producto duarum potestatum in se ductarum: ut.*

Duæ radices. 2. —— 3. *6 productum.*

Duo quadrata. 4. —— 9. *36. productum duorum quadratorum.* *6. Radix quadrata.*

Duæ radices. 2. —— 3. *6. productum.*

Duo cubi. 8. —— 27. *216.* *6 radix cubica.*

Quæ

Quæ omnia ut specialius illustrentur, iam sequentur extractiones aliquot radicum, in quibus præcepta ad usum transferentur.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ.

πρότασις. *Dati cuiuscunque numeri quadrati, vel maximi quadrati sub numero dato contenti, radicem quadratam extrahere.*

Quatuor sunt casus huius propositionis. Numerus enim datus aut est integer, aut fractus: isque aut verè, aut non verè quadratus: & rursus aut minor, aut maior centenario.

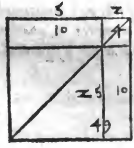
ἔκθ. primi casus. *Sit 49 numerus verè quadratus, isque minor centenario.*

Δ. Oportet *dati numeri radicem quadratam extrahere.*

Κατ. *Cum datus numerus sit minor centenario: radix per se manifesta est & nota, tum ex tabula superiore, axiomate 8: tum ex tabula multiplicationis digitorum inter se, quæ inter primarias radices, earumque quadrata ostendit 7 esse eum numerum, qui in se ductus constituit 49.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 7 esse radicem quadratam dati numeri 49.*

Ἀπόδειξις est analysis propositi quadrati exponens quot productis quilibet quadratus æqualis sit. Assumatur igitur hic numerus 7, & secetur in suas partes, nimirum 5 & 2: multiplicetur quoque quælibet quadratè. Fiet autem de 5 quadratus 25 & de 2 erit 4. Partes sunt latera, maius 5, minus 2. Deinde ducatur latus secundum in duplum latus primum, & fiet 20, quæ tria producta simul collecta constituent 49.



Ἀπόδειξις pendet ex quarta propositione lib. 2, Elem. Si numerus rectus diuidatur vel recta secetur utcunque, quadratum quod fit ex tota æquale est quadratis, quæ fiunt ex partibus segmentorum, & isti rectangulo, quod bis sub duobus segmentis comprehenditur, ut apparet in adiecto schemate.

Ex

Ex quo liquet, quadratum magnum, id est, 49 æquale esse duobus quadratis, videlicet 5 & 2, & insuper duobus productis, quæ fiunt ex 2 & 5 bis in se ductis: siue quod idem est, uno producto è latere secundo in duplum latus primum, hoc modo.

25. quadratum maius.
4 quadratum minus.
20. Duplum.

49. Quadratum totale.

ἐκθ. Secundi casus. *Sit 119025 numerus verè quadratus, isq; maior centenario.*

Δ. Oportet *dati numeri radicem quadratam extrahere.*

Κατ. *Extractionis radicis quadratæ, ut omnium cæterarum in numeris compositis, partes sunt tres. 1. Distinctio numeri propositi. 2. Extractio radicis simplicis. 3. Diuisio. Duæ priores tantum semel. Postrema vero interdum semel, interdum sæpius repetenda est.*

1. DISTINCTIO numeri. *Numerus datus, ex quo radix extrahenda est, distinguatur punctis suprà positis, facto initio à dextra: sic ut imparia tantum loca signentur: paria vero vacua relinquuntur: sequenti modo, 1 1' 9 0' 2 5'. Vsus distinctionis est, ut ostendat numerum characterum radicis: & ut singulæ figuræ ad sua puncta referantur: ut notata cum sinistra, sic: undecim, nonaginta, viginti quinq;. Cumq; tria sint puncta, tres erunt characteres radicis.*

2. EXTRACTIO radicis simplicis. *1. Quære simplicem radicem ex figuris ultimi puncti, per superiorem tabellam, vel per memoriam. 2. Simplicem radicem inuentam scribe post semicirculum. 3. quære quadratum simplicis radicis ex memoria. 4. quadratum scribe sub ultimo puncto. 5. aufer hoc quadratum à figuris ultimi puncti, hoc modo.*

2
1 1 9 0' 2 6' (3.
9

Radix

Radix quadrata de 11 proximè minor est tria. Neq. enim 11 inter numeros quadratos in superiori tabella reperitur. Huius igitur quadratum 9 ab 11 subduces, binarium residuum supra scribens.

3. DIVISIO. 1. Quare diuisorem duplicando, quicquid est post semicirculum. 2. diuisorem inuentum scribe sub sinistra figura, quæ sequitur punctatum. 3. Quare quotum ex residuis (si qua sunt) & figuris penultimi puncti. 4. quotum scribe bis, semel post semicicirculum, & semel ad diuisorem, sub puncto penultimo. 3. Multiplica quotum per quotum & diuisorem: productum infra scribito. 4. Productum subtrahe à figuris supra positis: ut in allato exemplo, duplicantes 3, productum 6 sub 9 inter puncta statues, & quia hic in supra scripto quater continetur, 4 inuenta radici adscribes, nec non puncto subÿcies: & ducta inuenta radice in 64 prodeunt 256, ita superiori numero subÿcienda, ut prima figura sub puncto collocetur: quæ à supra locato numero subtracta, 34 relinquunt. Vt vero figuræ penultimi puncti tractata sunt: ita reliqua omnia puncta versus dextram propria diuisione tractanda sunt: ut apparet in dato exemplo.

```
 234
 119025 (345.
 964
   4
 ------
 256
   685
     5
 ----------
 3425
```

Duplicatio quoti binaria.

3	34
2	2
6.	68.

Repetitio τοῦ λογισμοῦ. *Dico 345 esse radicem quadratam dati numeri 119025.*

Ἀπόδειξιν gubernat in numeris theorema hoc. Si numerus compositus in se multiplicatur, producitur quadratus constans ex quadratis numerorum componentium radicem: & numeris, qui fiunt ex multiplicatione omnium præcedentium, in omnium se-

quentium duplos: siue contrà omnium sequentium in omnium præcedentium duplos. Ponatur igitur numerus 345, qui in se ductus quadratum faciat. Hic in se ducatur per partes, & primum radices in se, hoc modo.

300	40	5
300	40	5
90000.	1600.	25.

Quorum additio est hæc.

25
1600
90000
91825

Vides in hac additione locum imparem esse locum radicum. Hæc igitur etiam est causa, cur tertius quisque puncto notetur.

Deinde sex bini numeri inæquales in se ducantur, hoc modo.

40	300	40	300	300	300
5	5	5	40	5	40
200	1500	200	12000	1500	12000.

Quorum additio est hæc.

200
1500
200
12000
1500
12000
27400

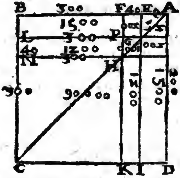
Hi numeri locis medijs interponuntur inter quadratos: cumque tres bini sint inuicẽ æquales, ideo in operatione fit quoti duplicatio.

Tertio addantur omnes numeri, & prouenient 119025 quadratum 345.

DEMONSTRATIO GEOMETRICA.

Extracturus radicem quadratam ex numero dato composito describo quadratum a b c d, quod linea διαγώνιος a c dispescat in duo æqualia triangula. Sit autem totum quadratum 119025: qui numerus, cum tria puncta habeat, indicat lineam a b esse diuidendam in tria segmenta a e, e f, f b. Iam è singulis punctis ducantur rectæ e i, f k parallelæ lateribus a d, b c, quæ diagoniam secant in punctis g & h: rursus per puncta g h ducantur rectæ l m, n o, parallelæ lateribus a b, c d.

Ἀπόδειξις.



Ἀπόδειξις.

1 Syll. sent. com. Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis. Hic est totum quadratum a c, diuisum lineis, quæ includunt plura parallelogramma. Ergo totum quadratum est æquale parallelogrammis b f, f g, e m, l h, p q, g o, n k, h i, q d, tanquam partibus simul sumtis.

2 Syll. πόρισμα 4 prop. 2. El. In quadratis parallelogramma circa diametrum sunt quadrata. Ergo in quadrato a b c d parallelogramma, e m, p q, n k, circa diametrum a c descripta a d segmenta a e, e f, f b, lateris a b sunt quadrata particularia.

3 Syll. 43 prop. lib. 1, & corol. prop. 4. lib. 2. In omni parallelogrammo supplementa parallelogrammorum circa diametrum sunt inter se æqualia, non tantum quod ad aream, sed & quod ad longitudinem & latitudinem.

Hic sunt duo supplementa parallelogrammorum b g, & g d circa diametrum a c. Ergo duo supplementa b g, & g d sunt inter se æqualia, & areis, & binis lateribus.

4. Per eandem duo supplementa l h & h i sunt inter se æqualia, ratione tum areæ, tum laterum.

Tot autem sunt supplementa, quot loca intermedia. Supplementa enim repræsentant loca intermedia.

5 Syll. sententia. Dato quadrato dabitur radix vel per tabellam, vel ex memoria.

Hic est quadratum n k, quod repræsentant figuræ tertij puncti, nempe 11.

Ergo radix siue latus illius quodcunque n h, h k, k c, c n, per tabellam, vel memoriam est 3.

Nam ter tria sunt nouem. Tria igitur post semicirculum scribuntur pro prima radice: & 9 sub figuris tertij pũcti ut in diuisione.

6 Sententia subtr. Dato toto & una parte, dabitur altera pars per subtractionem.

Hic datur totum, nempe 11, & pars, nempe 9. Ergo altera pars per subtractionem est 2, quæ supra 11 cancellata scribuntur.

9. Sententia. Datis duobus supplementis æqualibus, unum latus duplicatum facit latus dupli rectanguli. Hic sunt duo supplementa æqualia, nempe l h, h i. Ergo unum latus 3 duplicatum facit latus dupli rectanguli, sex. Hinc colligi potest, cur quotus duplicetur & productum subscribitur numeris intermedijs.

10 prop sent. diuis. Data area & uno latere dabitur alterum latus per diuisionem. Hic area duorum supplementorum est 29: & unum latus sex. Ergo alterū latus per diuisionem est 4. Est autem alterum latus quadrati p q, quodcunq; p g, g q. q h, h p. Hæc est causa diuisionis. Quatuor igitur scribitur post semicirculū pro secunda radice.

11 Sent. multipl. E datis partibus certo numero sumendis totū cognoscitur per multiplicationem. Hic sunt datæ partes 4 & 6. Ergo per multiplicationem totum est 24.

12 Sent. subtr. Dato toto & una parte, dabitur altera pars per subtractionem. Hic datur totum, nempe 29: & una pars 24. Ergo per subtractionem altera pars est 5.

13 Sententia. Data radice dabitur quadratus numerus. Huius quadrati p q radix est 4. Ergo eiusdē quadrati numerus quadratus est 16.

14 Sent. subtr. Dato toto & una parte dabitur altera pars per subtractionem. Hic datur totum, nempe 50: & una pars, 16. Ergo per subtractionem altera pars est 34.

15 Sententia. Datis duobus supplementis æqualibus unum latus duplicatum, facit latus dupli rectanguli. Hic sunt duo supplementa æqualia, b g, g d. Ergo unum latus, 34 duplicatum facit latus dupli rectanguli, 68. Hinc intelligitur, cur totus quotus rursus duplicetur. Productum subscribitur numeris intermedijs.

16 Sentent. diuis. Data area & uno latere dabitur alterum latus per diuisionem. Hic area duorum supplementorum inter se æqualium est 342: & unum latus 68. Ergo alterum latus per diuisionem est 5. Est autem alterum latus quadrati e m quodcunque a e, e g, g m, m a.

17. Sententia. Data radice dabitur quadratus numerus multiplicando in se. Huius quadrati e m radix est 5. Ergo eiusdem quadrati numerus quadratus est 25.

18 Sententia. Partes simul sumtæ, subtractæ à toto nihil relinquunt. Partes simul sumtæ sunt 25. Ergo subtractæ à 25, toto, nihil relinquunt.

συμπερ-

συμπέρασμα. Ergo dati numeri verè quadrati radix quadrata extracta est, quod fecisse oportuit.

ἔκθ. tertij casus. *Sit 12 numerus non verè quadratus, pro arbitrio. Potest enim esse vel maior vel minor centenario.*

Δ. Oportet *dati numeri radicem quadratam vera tam propinquam inuenire, ut ne centesima aut millesima, aut alia quauis pars desit.*

Κατασκ. *Primum multiplica in se numerũ (cuius partem deesse nolis.) significantem partes. 2. Illud quadratum multiplica in numerum, cuius radix proxima quaeritur. 3. Ex eo producto extrahe radicem. 4. Quod prouenit erit numerator emergentis radicis fractæ: cui postea subscribatur denominator partium: ut in proposito exemplo, cùm 12 sit numerus non verè quadratus, velim autem radicem eius propinquam cognoscere, cui centesima pars non desit: primum multiplico 100 in se, & prouenit quadratum 10000. Secundo 10000 per 12 multiplico, & prodit 120000. Tertiò radix producti est 346. Quartò radicem supra scribo instar numeratoris: partes sumtas infra, instar denominatoris, hoc modo $\frac{346}{100}$. Diuiso deniq; numeratore per denominatorem prodit $3\frac{46}{100}$.*

Repetitio τῆ διορ. *Dico $3\frac{46}{100}$ esse radicem quadratam propinquam de 12: ut ne centesima quidem pars desit.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. propositio 11 lib. 8. Quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem: id est, compositam ex duabus rationibus.

Hic sunt duo quadrati 12 & 120000: & rursus 10000 & 1. Est autem 346 latus siue radix quadrata de 120000: 100 vero radix quadrata de 10000.

Ergo proportio 10000 ad 1 est duplicata proportionis 100 ad 1, hoc modo.

1. 100. 10000.

100 100

Sic proportio 120000 ad 12 est duplicata proportionis 346 ad 1, hoc modo.

1. 346. 120000.

346 346 quàm proxime.

2. Syll. sententia. Data ratione & uno numero, dabitur alter numerus per regulam proportionum. Hic datur ratio 100 ad 1, & unus numerus 346. Ergo dabitur alter numerus per regulam proportionum hoc modo. 100. d. 1. q. 346. d. $\frac{346}{100}$, id est, $3\frac{46}{100}$.

Ἀπόδειξις plenior habetur infra in extractione radicis censicensicæ.

συμπέρ. Dati ergo numeri non vere quadrati radix quadrata veræ quàm proxime similis in partibus centesimis inuenta est, quod fecisse oportuit. Eodem modo radix in partibus millesimis aut alijs quibuscunque reperitur.

ἔκθ. quarti casus *Sit numerus fractus* $\frac{4}{9}$.

Δ. Oportet *dati numeri fracti radicem inuenire.*

κατ. *Eadem est operatio in numero fracto, quæ in integro, hoc demto, quòd cum fractus binis scribatur numeris, utriusq; radix inuenienda sit, quæ radicem desideratam ostendet: ut in allato exemplo radix quadrata* $\frac{4}{9}$ *sunt* $\frac{2}{3}$.

Quod si horum alter radicem non habeat, legitima radice partes carebunt: ut $\frac{9}{27}$ *tametsi numerator quadratam radicem habeat: quia denominator eadem destituitur. Sic* $\frac{10}{16}$ *etsi denominator radicem quadratam habeat, quòd eam non admittat numerator.*

Potest vero horum, similiumq; fractorum aliquo modo colligi radix appositione cifrarum. Nam si numeratori ac denominatori præpositis æquè multis circulis, utriusq; seorsim inquiratur radix. Numeratoris enim radix numeratorem: denominatoris vero denominatorem futuræ radicis ostendet. Sic radix quadrata $\frac{2}{9}$ *est quasi* $\frac{141}{300}$, *hoc modo.* $\frac{20000}{90000} \Big| \frac{141}{300}$.

Hic numeratoris radix quadrata deprehenditur quasi 141: denominatoris vero similis radix absolutè 300. Nec aliter cum reliquis similibus minutijs agendum. Rursus si numerus fractus sit mixtus, is primum reducendus est ad simplicem eamq; in minimis terminis: unde proueniet nouus fractus, cuius numerator & denominator si verè sit quadratus, vera radix, ut antea, ex illis colligi potest:

test: sin minus, non potest; quàm proxima autem cifris additis, ut antea, potest. Sic radix quadrata $5\frac{38}{50}$ est præcisè $2\frac{2}{5}$.

Nam $5\frac{38}{50}$ in minimis terminis est $5\frac{19}{25}$, quæ reducta ad simplicem fractionem faciunt $\frac{144}{25}$. Iam radix numeratoris est 12: denominatoris 5: unde fit hæc fractio $\frac{12}{5}$, cuius valor $2\frac{2}{5}$. Radix autem quadrata $5\frac{2}{3}$ est quasi $2\frac{2}{5}$. Nam $5\frac{2}{3}$ in minimis terminis est $\frac{17}{3}$: additis vero cifris hoc modo $\frac{170000}{30000}$. Hic numeratoris radix quadrata est 412: denominatoris vero similis radix 173: unde fit hæc fractio $\frac{412}{173}$ cuius valor $2\frac{2}{5}$.

Ἀπόδειξις est eadem, quæ integrorum. Nam quantitates minutiarum significantur per partes suas, id est, numeros numeratoris & denominatoris.

Quod si plures fractiones sint propositæ, antequam radix quadrata quæratur, eandem esse denominationem oportet: qua posita radix ut in integris quæritur: ut $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{6}{8}$ inuicem additæ faciunt $\frac{512}{172}$. Harum radix est $\frac{22}{13}$.

SCHOLIVM.

1. Numeris imparibus ab unitate incipiendo secundum naturalem ordinem dispositis, si sequens præcedentibus addatur, producetur numerus quadratus, cuius omnia latera sunt æqualia: ut.

	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.	21.	23
quadrati	4.	9.	16.	25.	35.	49.	64.	81.	100.	121.	144.	
Radices	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	

Hæc est inuentio quadratorum. & sic deinceps.

2. Quadratè multiplicare, siue quadrare est numerum in se ducere, vel quod idem est, duplare siue duplicare. Illud est Geometricum, hoc Arithmeticum vocabulum.

3. Extractio radicis quadratæ est lateris quadrati exquisitio: siue numeri alicuius inuentio, qui in se ductus datum numerum penitus vel proximè restituat. Græcis ἐπιλογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς πλευρᾶς.

4. Datus numerus habet πλευρὰν aut μῆκος ῥητὸν, id est, latus: quod integris seu rationalibus numeris exprimi potest, aut non ῥητὸν μήκει, sed δυνάμει tantum. Ille verè quadratus est: hic non item. Indicium illius est, si omnibus peractis in fine nihil remanet: huius, si aliquid residuum supersit.

5. Si dato numero non quadrato extracta fuerit radix aliqua: necesse est ipsam esse radicem quadrati maximi, qui in dato numero potest reperiri. Si enim maiorem sumseris: hæc in se ducta producet numerum, qui in excessu à proposito numero aberit.

6. Nu-

6. Numerus omnis, cuius prima nota est 2, aut 3 aut 7 aut 8 non est quadratus. Neque etiam si prima fuerit 5, & secunda non sit duo. Causa patet ex multiplicatione numerorum inter se, in qua nullus numerus exit, cuius prima nota sit ea, quam nominauimus.

7. Vnitas in numero quadratorum etiam ponitur ab Arithmeticis, licet impropriè: cum & impropriè numerus dicatur.

8. E numero non verè quadrato siue integro siue fracto nunquã vera radix extrahi potest, nisi ὡς ἔγγιστα, vel additis cifris, ut supra dictum, vel aliter sic. Inuento lateri duplum unitate auctum residuo subijce, ut radix 12 est $3\frac{3}{7}$. Nam residuum est 3: duplum radicis unitate auctum est 7. Et sic radix supputata minor erit verâ. Quod si duplum unitate non augeatur, tum euadet radix maior verâ. Causa huius rei docetur axiomate 24. huius libri. Media vero inter maiorem & minorem est veræ quàm optimè propinqua, ut in exemplo superiore $3\frac{39}{84}$. Mediam esse probat reductio ad æquales denominatores hoc modo. $\frac{1764}{3528} \mid \frac{1638}{3528} \mid \frac{1512}{3528}$.

9. Quantò plures citræ proposito numero adiectæ fuerint, tantò veræ propiorem radicem, numerus inuentus exprimet: ut radix quadrata 12 in partibus centesimis est $3\frac{23}{50}$, in partibus millesimis est $3\frac{231}{500}$. Comparando autem unam radicem cum altera prior est minor: posterior est maior, magisque ad numerum quadratum propositum accedens. Nam per reductionem ad æquales denominatores $\frac{23}{50}$ faciunt $\frac{1150}{2500}$: $\frac{231}{500}$ faciunt $\frac{1155}{2500}$.

10. In extractione radicis à numero non verè quadrato minutiæ aliquot semper restant, quæ minus quàm unam partem faciant: ut ad integrum formandum partes illæ nunquam deduci possint.

11. Ex ratione extrahendi radicem quadratam mox colligi potest ratio inquirendi omnes alias radices, quas regula Algebræ usurpat.

12. Fractiones an sint quadratæ non semper intelligitur, nisi ad minimos numeros redigantur: ut $\frac{12}{27}$, quæ reducta facit $\frac{4}{9}$ & latus habet $\frac{2}{3}$: quod ex notatione priori non cognoscitur.

13. Tres sunt huius extractionis δοκιμασίαι: una quadrata radicis inuentæ multiplicatio: altera diuisio: tertia, collatio radicum & quadratorum. Multiplicatio quadrata, ut 12 paulo ante deprehensa est quadrata radix 3 residuis tribus: si eadem radix in se multiplicetur, prodeunt 9, quæ cum 3 residuis 12 integrant numerum quadratum propositum. Producto enim numero addendum, quod peracta operatione residuum fuit. Quod si fractio $3\frac{3}{7}$ in se ducantur, exi-

tur, exi-

tur, exibunt $11\frac{37}{49}$, numerus minor: propior vero autem si altera fractio supra inuenta $3\frac{23}{50}$ in se ducatur. Prouenie̅t enim $11\frac{24}{25}$. Deficit igitur $\frac{1}{25}$, quo minus collectus sit numerus, cuius radix inue̅ta est.

14. Altera δοκιμασία per diuisionem est hæc. Diuidatur 12 per $3\frac{3}{7}$. Quotus erit $3\frac{1}{2}$ maior radice inuenta excessu $\frac{1}{14}$. Quod si diuidatur per $3\frac{23}{50}$, quotus erit $3\frac{81}{173}$, id est, ferè $3\frac{1}{2}$, ut antea.

Tertia δοκιμασία est collatio radicum & quadratorum. Nam, ut habetur axiomate 18, productum duarum radicum est æquale radici extractæ, ex producto duarum potestatum in se.

15 In nulla extractione radicis quadratæ residuum, si quod superfuit, maius esse potest duplo radicis inuentæ. Quod si superat unitate, tum numerus propositus radicem habet unitate maiorem inuenta. V. G. Sit quadratum 36, cuius radix sex: duplum illius 12, quod auctum unitate facit 13. Hoc additum ad 36 efficit 49, quadratum proximè maius quàm 36. Si igitur quis proponeret numerum 36, inueniretq; radicem 7, erratum esset, quia superessent 13, quæ maiora sunt quàm duplum radicis. Hinc & colligitur differentia inter duos quadratos proximos.

16. Potest & probari radix, num rectè inuenta sit, per abiectionem 9 aut 7: ut in primo exemplo, 119025, cuius radix fuit 345, reiectis 9 ex radice remanent 3, quæ in utroque angulo crucis scribo, cum radix & diuisor, & quotus sit. Iam ductis 3 in se fiunt 9: reiectisque 9 manet 0 in superiore angulo crucis collocandum. Tandem reiectis 9 ex quadrato proposito remanet etiam 0. Septenaria abiectio idem facit seruatis suis cautelis.

0
3 ✕ 3
0

Potest denique probari extractio, nouo eoq; duplici modo: ac primum per numeros Stifelij sic.

Ἐκθ. *Sit numerus 119025 uerè quadratus, isq́; maior centenario.*

Δ. Oportet *dati numeri radicem quadratam extrahere per numeros prædicti artificis.*

Κατ. *Prima radix habetur ex tabella. Secunda radicis diuisor nouus inuenitur sic.*

1. Numerus pro radice quadrata est 20.

2. Quotum primo inuentum, nempe 3 multiplico per 20, numerum radici quadratæ destinatum: productum est 60.

3. Per 60 diuide numeros, qui ad punctum tertium pertinent, nempe 290, & pro quoto reperio 4.

4. Numeros repertos sic dispono.

3. 20. 4
16

5. Tres numeros antea dispositos inter se multiplico, sic. Ter 20 sunt 60: quater 60 sunt 240. Producto 240, addo quadratum 16, & summam 256, ex puncto 290 detraho, & relinquuntur 3425: quæ ad sequens punctum pertinent.

6. Pono iterum diuisorem ex toto quoto 34, ducto in numerum peculiarem 20, quem reperio 680, qui quinquies in puncto 3425 continetur. Pono igitur totum quotum prius inuentum 34 ad sinistram, & numerum peculiarem 20 in medio: & quotum 5 nunc inuentum ad dextram, eiusq; quadratum 25 sub illo, ut in exemplo patet.

34——20——5.
25.

Multiplicatio trium superiorum numerorum facit 3400: addo quadratum 25 figuræ inuentæ 5, fit numerus 3425, qui ex characteribus puncti 3425 detractus nihil relinquit.

Deinde per numeros Algebricos sic.

1. Prima radix habetur ex tabella supra posita: secunda radicis diuisor nouus inuenitur sic.

2. Numerus pro radice quadrata est 1 ℨ ✠ 2 ℞ ✠ 1.

3. Quotum primò inuentum nempe 3 multiplico per 2 ℞, numerum radici quadratæ destinatum. Productum est 6.

4. Per sex diuido numeros, qui ad punctum tertium pertinent, nempe 290, & pro quoto reperio 4. quæ ducta in 6 faciunt 24: in se vero 16: quorum summa 256 subtracta à 290 relinquit 3425.

5. Rursus nouus diuisor reperitur numeros quoti duplicando, & fiunt 68, quæ in numeris antea relictis 3425 habentur quinquies.

6. Iam quinq; bis subscripta numero interpuncto & ducta tum in se,

in se, tum in totum diuisorem procreant 3425, quæ sunt æqualia numero suprascripto: unde subtracta ab illo nihil relinquunt.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico 345 esse radicem quadratam dati numeri 11′90′25.*

Ἀπόδειξις utriusque praxeos est eadem, quæ præcedentis per analysin Arithmeticam Geometricæ respondentem. Nam 20 & radices 2 nihil aliud sunt, quam duplum radicis, ut in analytica extractione nominatur.

EXTRACTIO RADICIS QVADRANGVLÆ.

πρότασις. Dati cuiuscunque quadranguli radicem vel radices extrahere.

Duo sunt casus huius extractionis. Aut enim una radix, aut duæ quæruntur.

Vnius radicis ex numero non verè quadrato extractio, eadem quæ non verè quadratorum est. Est autem radix irrationalis. V. G. Rectanguli 7746 radix quàm proxima erit $88\frac{2}{177}$. Numerus enim 7746 non est verè quadratus.

ἐκθ. Secundi casus. *Sit numerus quadrangulus 20.*

Δ. Oportet *ex dato numero duas radices extrahere, id est, inuenire duos numeros, qui in se ducti 20 constituant.*

Κατ. *Sume numeri propositi quadratum utrumcunque siue maximum siue minimum: cuius tamen radix numerum ipsum metiatur: eius deinde radice numerum ab initio propositum diuide: & radicem alteram quotus: alteram diuisor ostendet, hoc modo.*

1. Maximum quadratum numeri dati est 16: minimum 4. 9 tertium, idque intermedium, hîc non valet: cùm numerum datum non metiatur.

2. Radix maximi quadrati 16 est 4: radix minimi quadrati 4 est 2.

3. Diuisio dato numero per 4 fit quotus 5: diuiso autem per 2 fit quotus 10.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico dati numeri 20 duas radices esse 4 & 5: vel 2 & 10: illas quadrata similiores: has dissimiliores.*

Ἀπόδειξις δι' ἰσὸς.

Sententia diuisionis. *Data area & uno latere, dabitur alterum latus per diuisionem.*

Data area est 20: & unum latus 4. Ergo per diuisionem alterum latus est 5.

Per eandem probatur alterum latus esse 10, si unum latus sit 2: quod fecisse oportuit.

σχόλιον.

1. Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciunt quempiam: productus quadratus erit: ut 100 quadratus est. Fit enim ex multiplicatione duorum quadratorum 4 & 25.

2. Si duo numeri, quadratus & non quadratus se mutuo multiplicantes faciant aliquem: productus non quadratus erit, ut 180 quadratus non est. Nam prouenit ex ductu 9 in 20. Quadratus autem est 9: 20 non quadratus.

3. Si duo numeri plani similes multiplicantes se mutuo faciant aliquem: productus quadratus erit: ut 6 & 54 in se ducta faciunt 324. prop. 1. lib. 9.

4. Numerus cuius latus integris exprimi nequit, quadratus non est. Tales sunt numeri primi: & quadratis exceptis, compositi cæteri omnes.

5. Si dato numero non quadrato extracta fuerit radix aliqua quadrati, necesse est ipsum esse radicem quadrati maximi, qui in dato numero potest reperiri.

6. Eiusdem numeri plures radices habentur, prout schema numeri dati figuratur: ut numeri supra propositi 20 binæ sunt radices, sed diuisis schematibus, quorum alterum ὁμομήκης, alterum ἑτερομήκης appellare licet.

7. Supplementa, quorum latera sunt inter se æqualia, unam radicem habent, eamq; veram: aliorum contrà quasi veram: vel binas radices.

8. Quadrangula, quorum latera sunt inæqualia: area vero numerum quadratum continet, habent binas radices, sed figuras diuersas: ut quadranguli cuius area est 324, numerus quadratus, latera inæqualia sunt 6 & 54. Quod si formā quadrati habeat, quodlibet latus erit 18.

9. Nume-

9. Numeri quadranguli & solidi, qui ipsi quidem quadrati aut cubici propriè non sunt, latera tamen certa atque integra, vel bina, vel terna habent, à Græcis *οἱ ἀνάλογον μέσοι* vocantur. Nam inter binos quadratos aut binos cubos medio loco ponuntur: ut 20 medius est inter duos quadratos 16 & 25, hoc modo 16, 20, 25.

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

πρότασις. Dati cuiuscunque numeri cubici, vel maximi cubici sub numero dato contenti radicem cubicam extrahere.

Totidem sunt casus huius extractionis: quot prioris in præcedenti propositione.

ἐκθ. primi casus. *Sit 64 numerus verè cubicus, isq́ minor 729. Nam multiplicatio cubica digitorum facit numeros cubicos minores 729: ut quadrata minores centenario.*

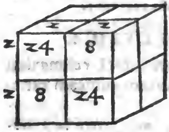
Δ. Oportet *dati numeri radicem cubicam extrahere.*

Κατασκ. Cum numerus datus sit minor cubis singulorum digitorum: radix illius quærenda est vel per multiplicationem cubicam, vel ex tabula superius posita.

Repetitio *τοῦ διορισμοῦ. Dico 4 esse radicem cubicam, numeri 64.*

Ἀπόδειξις est analysis propositi cubi, exponens quot productis quilibet cubus æqualis sit. Assumatur igitur hic numerus 4, & frangatur in suas partes nimirum in 2 & 2: multiplicetur quoque qualibet pars in se cubicè: unde fient 8 & 8: deinde quadratum de primo binario, id est, 4 multiplicetur per triplum alterius binarij, id est, *6*, fient 24: & iterum quadratum de altero binario, id est, 4 multiplicetur per triplum prioris binarij, id est *6*: unde fient similiter 24, quæ quatuor producta simul collecta constituunt *64*, eundem cum eo numerum, qui producitur, si 4 cubicè multiplicentur. Ex quo constat cubum magnum, id est, *64* æqualem esse duobus cubis, videlicet 8 & 8: & insuper duobus productis, quæ fiunt ex quatuor numeris, videlicet duobus quadratis laterum 4 & 4, & ex duobus triplis duorum laterum, nempe *6* & *6*. Quæ omnia confusè in *64* continentur, hoc modo.

4 Quadratum 2. ductum in 6 triplum 2. unde fit 24.
4 Quadratum - 2. ductum in 6 triplum 2. unde fit 24.
2. Cubus primus 8.
2. Cubus alter 8.
Summa -- 64.



Porro quadratum & triplum sumitur, quia totus cubus constat cubo lateris primi, plus solido à triplo lateris primi in quadratum secundi: plus solido à triplo quadrato lateris primi in latus secundum: plus cubo lateris secundi.

ἐκθ. Secundi casus. *Sit 13'824' numerus verè cubicus, isq́ maior quàm 729.*

Δ. Oportet *dati numeri radicem cubicam extrahere.*

Καταс. *Extractionis radicis cubicæ partes totidem sunt quot quadratæ.*

1. Distinctio numeri. Puncta sunt collocanda in primum, quartum, septimum, decimum, & sic deinceps, binis semper omissis in tertium, aut (quod eodem recidit) in loca millenariorum. Hæc puncta monent singulas figuras ad sua puncta referendas esse: & ostendunt, quot primariis figuris signati numeri cubica radix scribi debeat. Datus igitur numerus habebit radicem constantem duobus characteribus: & notati cum sinistris coniungendi sunt sic. 13,824.

2. Extractio radicis simplicis. 1. Quare simplicem radicem ex figuris ultimi puncti, per superiorem tabellam, vel per memoriam. 2. Simplicem radicem inventam scribe post semicirculum. 3. Cubum simplicis radicis pone sub iisdem figuris, & ab illis subtrahe, hoc modo.

$$\begin{array}{l} \ \ 5 \\ \not{1}3'824' \ (\ 2 \\ 8 \end{array}$$

Radix

Radix cubica de 13 proximè minor est duo. Neq; enim 13 inter numeros cubicos in superiori tabella reperitur. Huius igitur cubum 8 à 13 auferes, quinarium residuũ supra notans: idq; semel tantum faciendum.

3. DIVISIO. 1. Quare diuisorem triplicando, quicquid est post semicirculum.

2. Triplum inuentum scribe sub figura, qua proximum signum sequitur.

3. Quotum eundem in triplum multiplica.

4. Productum (quod vocetur diuisor) proximè ante triplum pone paulo inferius, ac subduc lineam.

5. Per diuisorem diuide numerũ sibi supra scriptũ, ut in diuisione.

6. Numerus qui prodit, ponendus est in semicirculum, & vocetur nouus digitus.

7. Iam inueniendi sunt tres numeri, Primus. Nouum digitum in diuisorem multiplica, & productum proximè sub diuisore pone. Si fuerint plures characteres, reliquos ordine colloca.

Secundus. Nouum digitum quadra, ac quadratum in triplum multiplica, & productum infra triplum pone.

Tertius. Nouum digitum cubicè multiplica & cubum infra punctum sequens colloca.

8. Hos tres numeros ita inuentos in unam summam adde, ac productum à supra scripto numero subtrahe. Hic posterior modus toties repetitur, quot sunt puncta sequentia: ut in supra posito exemplo.

```
  5
 1 3 8 2 4'  ( 2 4.
   8   6 Triplum.
   1 2 ... Diuisor.
 ____________
   4 8 Primus numerus procreatus ex multiplicatione noui digiti in diuisorẽ.
     9 6 Secundus ex quadrato noui digiti & triplo inter se multiplicatis.
       6 4 Tertius, cubus noui digiti.
 ____________
   5 8 2 4. Summa trium numerorum à supra scripto subtrahenda.
```

Repetitio

Repetitio τοῦ διος. *Dico 24 esse radicem cubicam dati numeri 13824.*

Ἀπόδειξις gubernat in numeris theorema hoc. Omnis numerus cubicus, cuius radix est numerus compositus, constat ex numeris cubicis radicem componentibus, & numeris procedentibus ex quolibet præcedente in omnium sequentium triplos: & deinde cum ipsis sequentibus in productum multiplicatis. Ponatur igitur numerus aliquis, qui in se ter ductus cubum faciat, ut 24. Hic in se ducatur per partes, & primum radices in se, hoc modo.

20	4	Quorum additio est hæc.
20	4	
400	16	8000
20	4	64
8000.	64.	8'064'.

Ex hac additione apparet locum quartum esse locum radicum. Hæc est causa inter alias, cur quartus quisque puncto notetur.

Supputatio numerorum intermediorum est hæc.

20 Quotus.	1200 Diuisor.	4 Nouus digitus
60 Triplum quoti.	4 Nouus quotus.	4 in se.
1200. Diuisor.	4800. Primus numerus.	16. Quadratum.
		60. Triplum.
		960. secundus numerus.

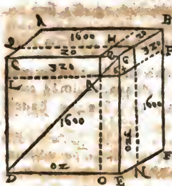
Hi numeri locis medijs interponuntur inter cubicos: quorum additio est hæc.

4800
960
5760, Summa numerorum intermediorum.
8064. Summa numerorum radicum.
13824. Totus cubus.

DEMONSTRATIO GEOMETRICA.

Ἀπόδειξις Geometricam gubernat theorema hoc. Si recta secetur in duo segmenta: cubus totius æquabitur cubis segmentorum, & duplici solido ter comprehenso à quadrato sui segmenti, & reliquo segmento.

Extracturus igitur radicem cubicam in dato exemplo secet lineam c g, quæ est 24 in c i, 20, & i g. 4. Cubus igitur totius æquatur cubis segmentorũ 20 & 4 scilicet 8000 & 64: duplicibus item solidis seu



seu parallelipedis, quorum terna æqualem inter se soliditatẽ habent, nempe minorum quodlibet 320, procreatũ ex quadrato segmenti 4 in alterum 20 mültiplicato: atque hæc tria parallelipeda simul sumta faciunt 960. Trium vero maiorum quodlibet continet 1600 procreatum à quadrato maioris segmenti 20 in 4 multiplicatum: atque illa simul sumta constituunt 4800.

Cubus igitur totus octo constat prismatis, quorum duo sunt duo cubi particulares, unus maior L O, alter minor KG: sex sunt prismata oblonga inter se æqualia, quorum tria minora addita 960: tria maiora addita 4800 constituunt: quæ in unam summam collecta faciunt 13824, hoc modo.

8000
64
960
4800
13824.

Hactenus synthesis: nunc analysis operationis per syllogismos.

1 Syll. sententia. Quot sunt puncta, tot sunt cubi particulares: totidemque radices. In numero dato sunt duo puncta. Ergo duo cubi, totidemque radices Significat autem prima radix unitates: secunda decurias, tertia centurias, & sic deinceps.

2 Syll. sententia Dato cubo, dabitur illius radix per memoriam vel tabellam. Hic datur cubus particularis *l r o d* cuius area in figuris notatis puncto, 13, siue 13000. Ergo latus illius proximum *l r* est 2, siue 20, & per consequens cubus maior 8000.

3 Syll. Dato toto & una parte dabitur reliqua pars per subtractionem. Hic datur totus cubus 13, & pars nempe 8. Ergo altera pars per subtractionem est 5 quæ supra 13 cancellata scribuntur. Valet autem 13 tredecim millia: & 8 octo millia: sic 5, quinque millia, quæ coniuncta cum 825 parallelepipeda & cubum minorem constituunt. 5824.

Iam inueniendum est latus cubi minoris, quod commune habet cum solido segmenti maioris c l Sic igitur ulterius procedimus.

4 Syll. sententia. Datis tribus parallelipedis æqualibus: unum latus triplicatum facit latus tripli parallelepipedi. Tria parallelepi-

Z peda

peda *em*, *ie*, *ib* sunt æqualia, quorum unum latus *eg* est 2, siue 20. Ergo latus triplicatum est sex, siue sexaginta. Hinc colligi potest, cur quotus triplicetur, & productum subscribatur numeris intermedijs.

5 Syll. sententia. Dato latere quadrati dabitur illius area per multiplicationem in se. In segmento maiore *ce* est quadratum *le*, cuius unum latus est *ld*, 2 vel 20. Ergo area illius est 4, siue 400. Eadem est area duorum reliquorum quadratorum *qb*, & *bf*.

6 Syll. sent. addit. Datis partibus dabitur totum. In dato cubo sunt tria quadrata, quorum singula faciunt 400. Ergo per additionem summa illorum est 1200. Hæc est causa cur quotus quadretur, & productum tripletur.

7 Syll. sentent. diuis. Data area & uno latere dabitur alterum latus per diuisionem. Parallelepipedorum & cubi minoris area est 5824: & unum latus 1200. Ergo per diuisionem alterum latus est 4, alterius segmenti. Hæc est causa diuisionis per 12, siue 1200.

8 Syll. sententia Dato latere quadrati dabitur illius area per multiplicationem in se. In segmento minore est quadratum *im*, cuius latus est 4. Ergo area illius est 16.

9 Syll. sentent. mult. Datis duobus numeris dabitur illius productum. Duo numeri dantur, triplum 6, & area unius quadrati, 16. Ergo per multiplicationem productum est 96: triplum parallelepipedum minus C simul sumtum.

10 Syll. sententia. Dato latere dabitur area cubi per multiplicationem ter in se. Latus cubi est 4. Ergo area est 64.

11 Syll. sentent. addit. Datis partibus dabitur totum. Partes parallelepipedorum & cubi minoris dantur. Ergo datur totum, hoc modo.

4800
960
64
5824.

12 Syll. sententia. Partes simul sumtæ, subtractæ à toto nihil relinquunt. Partes simul sumtæ sunt 5824. Totum est 5824. Ergo subtractæ à toto nihil relinquunt.

συμπέρ. Ergo dati numeri radix cubica extracta est: eaq; vera, cum nihil remaneat: *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. tertij casus. *Sit 12 numerus non verè cubicus, pro arbitrio: potest enim esse vel maior vel minor 729.*

A. Opor-

Δ. Oportet *dati numeri radicem cubicam verè tam propinquã inuenire, ut ne centesima aut millesima, aut alia quauis pars desit.*

Κατ. *Primum bis multiplica in se numerum, qui partes significat, & cuius partes deesse nolis. 2. Illum cubum duc in numerum, cuius radix proxima quaritur. 3. Ex eo producto extrahe radicem cubicam. 4. Quod prouenit erit numerator emergentis radicis fracta: cui postea subscribatur denominator partium: ut in pramisso exemplo, cùm 12 sit numerus non verè cubicus: velim autem radicem eius propinquam indagare, cui centesima pars non desit: primum multiplico 100 in se ter, & prouenit cubus 1000000. Secundò 1000000 per 12 multiplico & prodit 12000000. Tertiò radix cubica producti est 229 neglectis residuis. Quartò radicem supra scribe instar numeratoris: partes sumtas infra, instar denominatoris, hoc modo, $\frac{229}{100}$. Diuiso denique numeratore per denominatorem prodit ferè $2\frac{7}{25}$.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico $2\frac{7}{25}$ esse radicem cubicam propinquam 12, ut ne centesima quidem pars desit.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ tertij casus extractionis radicis quadratæ. Nam cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. prop. 12. lib. 8. Et sicut se habet unitas ad radicem: ita numerus cubicus ad radicem, axioma 11. Data autem ratione & uno numero, datur alter, per regulam proportionum.

συμπέρ. Dati ergo numeri non verè cubici radix cubica veræ quàm proximè æqualis in partibus centesimis inuenta est: *quod fecisse oportuit.* **Eodem modo radix cubica non vera in partibus millesimis, aut alijs quibuscunque reperitur.**

ἔκθ. quarti casus. Sit numerus fractus $\frac{8}{27}$.

Δ. Oportet *dati numeri fracti radicem cubicam inuenire.*

κατασκ. *Cubi lateris inuestigatio eodem modo fit in minutijs, quo in integris fieri solet: nisi quod geminandus est labor: cum tam in numeratore, quàm in denominatore radix sit quærenda. Latus autem in numeratore inuentum, numeratoris erit radix: quod vero ex denominatore eruetur: denominatoris radix habebitur: inter*

qua linea media interponēda est. Radix igitur cubica in dato exemplo $\frac{8}{27}$ sunt $\frac{2}{3}$.

Quod si horum alter radicem non habeat, vera radice partes carebunt: ut $\frac{9}{27}$ tametsi denominator cubicam radicem habeat, quia numerator eâdem destituitur. Sic $\frac{64}{97}$ etsi numerator cubicam habeat, quod eam non admittat denominator.

Potest vero horum similiumq; fragmentorum radix non præcisa, proxima tamen, colligi in partibus, sicut supra dictum in extractione radicis quadratæ. Exempli causa nosse desiderat quispiam, quæ sit radix cubica $\frac{2}{9}$, cum uterq; numerus cubicus non sit, ut ad desideratam radicem aliquo modo accedere possit: præpositis utriq; senis circulis in hunc modum $\frac{2000000}{9000000}$, numeratoris radix cubica deprehenditur quasi 58: denominatoris vero similis radix quasi 96. Concludet igitur duarum nonarum cubicum latus esse quasi $\frac{58}{96}$. Eadem est aliarum similium minutiarum ratio.

Contingit aliquando fractos esse cubicos, qui prima fronte non apparent, ut $\frac{24}{81}$. qui reducti ad minimos terminos eadem quantitate manente, cubici dignoscuntur. Nam si per communem mensuram maximam 3 diuiseris, restabit fragmentum $\frac{8}{27}$: cuius radix est $\frac{2}{3}$. In his igitur casibus minuenda est fractio ad minores terminos, ut explorentur termini, num sint verè cubici.

Rursus si numerus fractus sit mixtus, videndum primò, num integrum cum minutijs sint numeri verè cubici, & tum reductione ad simplices terminos opus non est, sed sola extractione usitata, ut $8\frac{8}{27}$ radix est $2\frac{2}{3}$. Sin minus, opus est reductione ad simplicem fractionem: & operatione ea, de qua supra diximus, per appositionem sex cifrarum in partibus centesimis, ut radix $3\frac{5}{8}$ sunt $\frac{284}{181}$. Nam $3\frac{5}{8}$ faciunt $\frac{29}{8}$: in partibus centesimis $\frac{29000000}{8000000}$: quorum radix $\frac{284}{181}$ siue $1\frac{103}{181}$.

Quod si numerus fractus sit secundarius, reducendus est ad primarium, & ex eo radix extrahenda, ut dictum in extractione radicis quadratæ.

Ἀπόδειξις

Ἀπόδειξις est eadem quæ integrorum. Nam ut quantitas integri per unum numerum: ita fractionis per duos numeros significatur, quorum unus numerator, alter denominator dicitur.

συμπέρ. Dati ergo numeri fracti tum simplicis tum mixti radix cubica tum vera tū quasi vera extracta est, quod fecisse oportuit.

χόλιον.

1. Extractio radicis cubicæ est lateris cubici inuestigatio: siue numeri alicuius inuentio, qui in se bis ductus datum numerum penitus vel proxime restituat.

2. Cubicè multiplicare est numerum aliquem bis in se multiplicare: vel, quod idem est, triplicare.

3. Numeris imparibus dispositis à ternario, si duo priores, postea tres, deinde quatuor postea quinque & sic deinceps coniungantur, cubus producetur, ut.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29.

Cubi.	8	27	64	125.
Radices	2.	3.	4.	5.

4. Modus operandi difficilior videtur: facilis vero reddetur ijs, qui cubi structuram considerant: plane vero perspicuus, si sensum iudicem quis adhibuerit: videlicet si cubum solidū lineæ in duo diuisæ efformauerit ex materia quapiam tractabili: in octo particulas diuisum, duos nimirum cubos minores, eosque inæquales, & sex parallelepipeda, quæ binas inter se soliditates, æqualitate & inæqualitate permutant.

5. Cubum Latini tesseram: Græci etiam hexaëdron vocant, quod sex hedras, id est, facies habeat quadratas, supremam, infimam: aduersam, posticam: dextram, sinistram.

6. Cubus maior exemtus è cubo totali relinquit sex parallelepipeda: tria maiora, & tria minora, & cubum minorem, quæ coniuncta solidum gnomonem constituunt.

7 Cubi duo sunt producta duorum segmentorum cubicè in se ductorum: parallelepipeda sunt producta ex quadrato prioris segmenti in secundum ter sumto: & vicissim ex quadrato secundi segmenti in prius ter sumto. V. G. Latus 14 secetur in 10 & 4: cubus totius lateris est 2744.

Partes cubi totius sunt hæ.

Cubus maioris segmenti		1000.
Cubus minoris segmenti		64.
Quadratum maioris segmenti		100
Quadratum minoris segmenti		16.
Parallelepipedum maius	1.	160.
	2.	160.
	3.	160.
Summa trium parallelep.		480.
Parallelepipedum minus.	1.	400
	2.	400
	3.	400
Summa trium parallelep. minorum.		1200.

Iam si addantur duo cubi particulares, & sex parallelepipeda, reddibit summa totius cubi 2744 hoc modo.

1000
64
480
1200

2744.

8. Cùm dato numero non cubico extracta fuerit radix cubi, oportet eum esse radicem maximi cubi, qui in dato numero potest inueniri.

9. Ratio eruendi radicem, ubi numerus cubus non est, alia quoq; est, diuersa à ratione supra posita, nempe hæc, quam Bruceus tradit. Triplum quadrati radicis inuentæ subijce partibus, quæ supersunt, eamque fractionem adde radici: numerus qui oritur semper latere cubico maior est: excessum huius cubi supra cubum, cuius radix quæritur, diuide per quadrati radicis triplum: quantitatem prodeuntem subducito à radice prius inuenta: relicta quantitas propius accedet ad radicem numeri propositi: ut in superiori exemplo, numeri 12, cuius radix proxima est 2, huius quadratum est 4: eius triplum 12: id subijce partibus 4, quæ supererant subducto cubo radicis inuentæ à numero proposito, oritur $\frac{4}{12}$: siue $\frac{1}{3}$: id adde radici inuentæ, prouenit $2\frac{1}{3}$, cuius cubus $12\frac{19}{27}$, & excessus supra 12 verũ cubum est $\frac{19}{27}$: hunc diuide in $16\frac{1}{3}$, siue $\frac{147}{9}$, nempe triplum quadrati radicis prioris $2\frac{1}{3}$, & prouenient $\frac{171}{3969}$: quæ subducito à radice prius inuenta $2\frac{1}{3}$ & relictus numerus est $2\frac{1455}{11907}$ ostendens radicem

cem

cem veræ propiorem. Huius enim cubus facit triplus
$\frac{4}{768}|\frac{12}{87}|\frac{79242816}{345558645}$, non excedens verum cubum $\frac{4}{41}$.

10. Qui coniunctum ex triplo radicis, & triplo quadrati eiusdem radicis cum unitate relictis partibus subijciunt, fractionemque addunt radici inuentæ, sæpius non parum ab iusta quantitate cubici lateris aberrant. Minor enim semper est iusto: ut in dato exemplo si quis velit corpori pedum cubicorum 12, quod altera parte sit oblongius, cubum facere æqualem & sumat radicem cubicam numeri 12 secundum rationem traditam $2\frac{4}{19}$, hoc modo.

Quadratum lateris est 4. Nam bis duo sunt 4. Iam triplum illius est 12: & triplum lateris simplicis est 6: quæ cum unitate addita faciunt 19, quæ loco denominatoris ponuntur sic, $2\frac{4}{19}$ siue $\frac{42}{19}$. Hic deprehendet cubum prouenire $\frac{74088}{6859}$, cuius valor est $10\frac{5408}{6859}$. qui ab iusta magnitudine deficit pede $1\frac{761}{6859}$. Nam cubus $2\frac{4}{19}$ non attingit 12.

Ex quo apparet radicem è numero non verè cubico nunquam veram esse: & in priore modo maiorem: in posteriore minorem emergere: priorem vero propius accedere: posteriorem longius: eam vero, quæ è partibus sumitur, de quo supra dictum fuit, ambobus esse exquisitiorem. Nam $\frac{57}{25}$ sunt plus quàm $\frac{42}{19}$: quod apparet ex reductione ad æquales denominatores.

Potest autem & exquisitior radix inueniri, si quæratur media inter maiorem, & minorem vera. Hæc enim proxima veræ dicetur.

11. In numeris fractis non verè cubicis diuersæ viæ sunt similiter. Quidam hanc rationem sequuntur: ducunt quadratum denominatoris in suum numeratorem: & producti sumunt latus cubicum propinquum: & hoc diuidunt per simplicem denominatorem: quod exit est latus cubicum quàm proximum. V. G. Sit numerus fractus non verè cubicus $\frac{2}{9}$: quadro 9 fiunt 81, duco in 2 numeratorem fit 162, cuius latus cubicum in partibus centesimis propinquum $\frac{542}{100}$ diuido per simplicem denominatorem 9, exit $\frac{542}{900}$ latus cubicum propinquum dati fracti numeri.

12. Si quis de praxeos recto successu dubitet, inuentũ latus in se, postea in productũ multiplicet: & producto huic numero, si quid operatione absoluta residui fuit, adijciat. Nã si rectè successit operatio, cuius ante inuenta radix est, numerus prodibit. V. G. Sit numerus fractus $\frac{2}{9}$, huius maximi in eodem contenti cubi latus paulo ante inuentum est $\frac{542}{900}$: quod si nunc $\frac{542}{900}$ in se ducantur, exurgunt $\frac{159220088}{729000000}$, quæ $\frac{2}{9}$ quàm proximè faciunt. Sic 12 numeri non verè

cubici

cubici latus 2 redundantibus 4 rectè inuentum est. Nam si 2 in se ducantur cubicè nascitur 8, quibus si 4, quæ absoluta praxi superfuere, addantur, 12 tandem prodibunt, quæ dato numero absolutè respondent, hoc modo.

2
2
——
4
2
——
8
Residuum. 4
——
Datus numerus 12.

Potest & probari radix inuenta ex collatione radicum & cuborum, secundum axioma 14, cuius & in extractione radicis quadratæ mentionem fecimus.

Potest denique probari, nouo, eoque duplici modo extractionis, ac primùm per numeros Stifelij, sic.

Ἐκθ. Sit 13'824', numerus verè cubicus.

Δ. Oportet *dati numeri radicem cubicam extrahere per numeros absolutos prædicti artificij.*

Κατ. *Prima radix habetur ex tabella: nempe 2, residui sunt 5'824' qui ad secundum punctum pertinent. Secunda radicis diuisor inuenitur sic.*

1. Numeri pro radice cubica sunt duo 300. 30.

2. Supra radicem inuentam 2 pono eius quadratum 4: & ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ, hoc modo.

4 — 300
2 — 30

3. Multiplico superiores duos numeros 4 & 300 inter se, & producto 1200 addo productum 60 ex multiplicatione numerorum inferiorum 2 & 30 inter se. Nam summa 1260 erit diuisor.

4. Diuido characteres puncti secundi residuos per diuisorem inuentum 1260 & quotum 4 adscribo binario post semicirculum.

5. Numeros repertos sic dispono.

ℨ *Prima* ℞. 4.	N. 300.	4. *secunda* ℞.
prima ℞. 2.	N. 30.	16. ℨ *secunda* ℞.
		64. ℭ *Secunda* ℞.

6. Nu-

6. Numeros antea dispositos inter se multiplico sic. Quater 300 sunt 1200, & quater 1200 sunt 4800: quod vocetur primum productum. Rursus bis 30 sunt 60, & decies sexies 60 sunt 960, quod vocetur secundum productum.

7. Productis duobus 4800 & 960 addatur cubus 64, fiet numerus 5824: qui subtractus à characteribus secundi puncti nihil relinquit. Deinde per numeros Algebricos.

Kατ. 1. Prima radix habetur ex tabella, nempe 21: residui sunt 5824, characteres secundi puncti. Secunda radicis diuisor nouus inuenitur sic.

2. Numeri pro radice cubica sunt hi. 1 ℭ ✠ 3 ℨ ✠ 3 ℞ ✠ 1.

3. Inuentæ radicis quadratum sume ter, & productum sub charactere sinistro interpunctum & cancellatum sequente colloca. Hoc triplum quadrati & diuisorem supra vocauimus.

Eandem radicem sume ter: & productum uno loco promoue versus dextram: lineolamq́ subducito.

5. Eandem radicem numero interpuncto subscribe. Numeros priores ad latus dextrum etiam seorsim memoriæ causa scribe: ut vides in schemate.

6. Per diuisorem characteres secundi puncti diuide: & quotum adscribe primæ radici post semicirculum.

7. Ad latus sinistrum numeros Cossicos multiplicationi inseruituros adscribe numeris antea inuentis: eosq́ inter se multiplica, & producta sub lineolam substratam eo ordine subscribe, ut vides in schemate.

8. Summam productorum à characteribus secundi puncti subtrahe; & si quod sit residuum supra annota, hoc modo.

9
1 3 8 2 4 (24.
8

℞—4—1 2 |
ʓ—16——6 |
¢————4

1 Quotus ℞ — 2.	3 ℞ 6 Triplum.
1 Quoti ʓ — 4.	3 ʓ 12. Diuisor.
2 Quotus ℞ — 4.	
2 Quoti ʓ — 16.	

64
96—
48——
9824

Hic 2 quotus nempe 4 ductus in 12, id est, diuisorem, siue 3 ʓ producit 48, quæ diuisori subiecta sunt: deinde 16 secundi quoti ʓ ductus in 6, triplum primi quoti procreat 96, quæ triplo subscribuntur: & secundus quotus cubice multiplicatur: & fiunt 64: quæ secundæ radici substernuntur.

Quod si plures characteres adfuerint, idem processus seruatur, qui antea: ut & in extractione quadrata.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico 24 esse radicem cubicam dati numeri 13824.*

Ἀπόδειξις utriusque praxeos est eadem, quæ superioris per analysin Arithmeticam Geometricæ respondentem. Nam 300 & 30 nihil aliud sunt quam triplum radicis: ut in analysi Arithmetice Geometrica extractione.

EXTRACTIO RADICIS SOLIDI OBLONGI.

πρότασις. Dati cuiuscunque solidi oblongi radicem vel radices extrahere.

Duo sunt casus huius extractionis. Aut enim una radix, aut duæ quæruntur.

Vnius radicis ex numero non verè cubico, compositone ex quadratis & cubis extractio eadem, quæ non verè cubicorum, compositorumúe

torumùe ex quadratis & cubis. Est autem radix irrationalis: cuius exempla plura supra habuimus.

ἐκθ. Secundi casus. *Sit numerus solidus oblongus, siue prisma, cuius area 48.*

Δ. Oportet *ex dato numero, quatenus inter solidos refertur, tres radices extrahere.*

Κάτασ. *Accipe maximum propositi numeri cubum: deinde per eiusdem radicem cubicam, numerum ipsum diuide. Quod ex diuisione prodit in suas radices diuidi debet: ipse autem diuisor erit radix tertia siue minima, hoc modo.*

1. Cubus maximus in 48 est 27.

2. Radix cubica 27 est 3.

3. 48 per 3 diuisa faciunt 16.

4. Radices 16 sunt 4. & 4. Nam quaterquatuor sunt 16, quæ numerum quadratum constituunt.

5. Tertia radix est 3, quia diuisor.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico dati numeri 48 radices tres esse, 3, 4, 4.*

Ἀπόδειξις διὰ τεσσάρων.

1 Syll. sententia. *Dato numero dabitur illius cubus maximus per tabellam.*

Datus numerus in nostro exemplo est 54. Ergo maximus illius cubus est 27, per tabellam.

2 Syll. sententia. *Dato cubo dabitur illius radix per extractionem cubicam, vel per tabellam.*

Datus cubus est 27.

Ergo radix illius per tabellam vel solam multiplicationem est 3, unum latus prismatis.

3 Syll. sententia diuisionis. *Data area & uno latere dabitur alterum latus per diuisionem.*

Data area prismatis est 54: & unum illius latus 3. Ergo per diuisionem alterum latus est 18.

 4 Sen-

4 Sententia diuisionis. *Data area & uno latere dabitur alterum latus per diuisionem.*

Data area est 54, & unum latus 18. Ergo per diuisionem tertiū latus est 3: quod fecisse oportuit.

σχόλιον.

1. Si cubus numerus seipsum vel alium cubum multiplicans procreet aliquem: productus cubus erit: ut 8 per 8 multiplicatus facit 64, numerum cubicum. Sic 8 per 27 multiplicatus facit 216, numerum cubicum. Prop. 3 & 4 lib. 9.

2. Si duo numeri cubicus & non cubicus se mutuo multiplicantes faciunt aliquem, factus non cubus erit, ut 160 cubus non est. Nam prouenit ex ductu cubi 8 in ductum non cubi 20.

3. Si compositus numerus aliquem multiplicans quempiam fecerit: factus solidus erit: ut 66 solidus est. Fit enim ex senario, numero composito ex 2 & 3 in se ductis: eodemq́, ducto in 11: siue ex mutua multiplicatione trium numerorum, 7. pr 9.

4. Solidi oblongi inter binos cubos bini medio loco ponuntur: ut 36 & 48 medius est inter 27 & 64, hoc modo.

27. 36. 48. 64.

Est autem 48 medium inter 27 & 64 maius: 36 minus medium: cuius & ipsius per præcedentem κατασκευὴν tres sunt radices nempe 3, 3, 4. Nam ter 3 sunt 9. & quater 9 sunt 36.

5. Solidi oblongi per se & absolutè considerati, non quatenus sunt medij inter duos cubos, non semper cubi maximi: sed interdū & proximi deinceps radice diuiduntur, & quotus in numeros componentes resoluitur. V. G. Numerus 54 habet binas radices: 3, ex maximo cubo 27: alteras 2 ex minore cubo 8. Iam 3 radix 27 diuisa per 54, parit 18, cuius numeri componentes (qui hic pro radicibus habentur) sunt 3 & 6: 2 radix diuisa per 54 parit 27, cuius numeri componentes sunt 3 & 9. Radices igitur sunt duplices: primæ 3. 3. 6. Secundæ 2. 3. 9: quæ in se mutuo ductæ utrobique quidem eundem numerum, sed diuersa schemata constituunt.

EXTRACTIO RADICIS CENSICENSICÆ.

πρόβλημα. Dati cuiuscunq; censicensici radicē extrahere.

Toti-

Totidem sunt casus huius extractionis, quot præcedentium. Numerus enim datus aut est verè, aut non verè censicensicus. Et rursus alius minor, alius maior 6561. Et iterum alius integer, alius fractus.

ἐκθ. primi casus. *Sit 2401 numerus verè censicensicus, isq́; minor 6561.*

Δ. Oportet *dati numeri radicem censicensicam extrahere.*

Κατ. *Si sit numerus minor centenario: radix nullo labore inuenitur vel per tabellam supra positam axiom. 12: vel per extractionem quadrati quadratam: unde elicietur prima radix 49: altera 7.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 7 esse radicem censicensicã numeri 2401.*

Ἀπόδειξις pendet ex definitione censicensici. Æquatur enim biquadrato, siue duobus quadratis: quæ in eo implicitè cõtinentur: ut apparet ex nomine & numero ad exemplum accomodato in κατασκευῇ.

συμπέρ. Numeri igitur dati censicensici radix inuenta est, *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. Secundi casus Sit 9834496, numerus verè censicensicus, maior 6561.

Δ. Oportet *dati numeri radicem censicensicam extrahere.*

Κατασκ. *Extrahe primùm radicem quadratam, deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix censicensica, quæ quæritur: ut radix quadrata de 9834496 est 3136: rursus radix quadrata de 3136 est 56.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico propositi numeri 9834496 radicem censicensicam esse 56.*

Ἀπόδειξις est composita ex demonstratione radicis quadratæ, ut liquet ex ipso radicis nomine, quæ censicensica appellatur.

συμπερ. Ergo dati numeri verè censicensici radix censicensica extracta est, *quod fecisse oportuit.*

Ἐκθ. tertij casus. Sit 12 numerus non verè censicensicus.

Δ. Oportet *dati numeri radicem censicensicam veræ tam propinquam inuenire, ut ne centesima aut millesima, aut alia quæuis pars desit.*

Κατ. Primum multiplica censicensice numerum (cuius partem deesse nolis) significantem partes. Productum erit denominator.

2. Idem productum multiplica in numerum propositum, cuius radix proxima quaritur. Productum erit numerator.

3. Ex utroq; producto extrahe radicem censicensicam.

4. Radicem numeratoris pone supra: denominatoris infra, instar fractionis interposita lineola.

5. Valorem fractionis inuestiga per diuisionem: ut in proposito exemplo, cupio radicem censicensicam quarere in partibus centesimis.

100 igitur multiplico censicensicè, & prodeunt 100000000 denominator. Hoc productum duco in 12, numerum propositum, & emergunt 1200000000, numerator.

Ex utroq; producto extrahens radicem censicensicam, inuenio radicem numeratoris 186, & paulò plus: radicem denominatoris 100: unde fit hac fractio $\frac{186}{100}$: cuius valor per diuisionem est $1\frac{86}{100}$ siue $\frac{43}{50}$, minor verâ: addita vero unitate, cum in extractione aliquid remanserit, $1\frac{87}{100}$ maior verâ.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico radicem censicensicam numeri 12 non verè censicensici esse $1\frac{86}{100}$ minorem vera: vel $1\frac{87}{100}$ maiorem verâ.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. *Vt se habet unitas ad multiplicantem: sic multiplicandus ad eū, qui procreari dicitur directè & ἐναλλὰξ, & ἀνάπαλιν. In dato exemplo, multiplicatur 12 per biquadratum in partibus centesimis, nempe 100000000 & producitur 1200000000. Ergo proportio numerorum triplex est hac.*

Vnitas.	Multiplicans.	Multiplicandus.	Procreatus.
1.	100000000.	12.	1200000000.

2 Syll. porisma, prop. 11. lib. 8. *Biquadratus ad biquadratū habet rationem quadruplicatam lateris ad latus, id est, compositam ex quatuor rationibus.* *Hic*

Hic sunt duo biquadrati 12 & 1200000000 & rursus 100000000 & 1. Ergo hi biquadrati habent ad se inuicem rationem quadruplicatam lateris ad latus. Est autem 186 latus siue radix de 1200000000 : 100 radix de 100000000. Iam proportio 100000000 ad 1 est quadruplicata proportionis 100 ad 1, hoc modo.

1. 100, 10000, 1000000, 100000000.

100 100 100 100

Sic proportio 1200000000 ad 12 est quadruplicata proportionis 186 ad 1, hoc modo.

1, 186, 34596, 6434856, 119688210.

186 186 186 proximè.

3 Sententia. *Data ratione & uno numero, dabitur alter numerus per regulam proportionum.*

Hic datur ratio 100 ad 1, & unus numerus, 186. Ergo dabitur alter numerus per regulam proportionum, hoc modo.

100. d. 1. q. 186. d. $\frac{186}{100}$.

4 Sententia. *Valor fractionis, cuius numerator est maior denominatore, inuenitur per diuisionem. Ergo valor huius fractionis* $\frac{186}{100}$ *per diuisionem est* $1\frac{86}{100}$. *Est autem radix minor vera. Illius enim biquadratum est* $11\frac{96883210}{100000000}$. *Quod si addatur unitas, cum in extractione aliquid remanserit, fiet radix* $1\frac{87}{100}$ *maior verâ. Illius enim biquadratum est* $12\frac{22830961}{100000000}$. *Media autem inter maiorem & minorem radix, satis accurata erit.*

ἐκθ. quarti casus. Sit numerus fractus $\frac{1}{16}$.

Δ. Oportet *dati numeri fracti radicem censicensicam inuenire.*

Κατασκ. *Inuestigatio lateris censicensici in fractis difficilis non est, ubi uterque numerus fractionis est biquadratus. Extrahitur enim radix à numeratore, eaque supra lineolam ponitur: deinde à denominatore, eaque infra lineolam substernitur. Sic radix censicensica* $\frac{1}{16}$ *est* $\frac{1}{2}$ *Nam radix 1 est 1: & radix 16 est 2.*

Contin-

Contingit aliquando fractos esse censicensicos, qui primo aspectu non apparent: unde eos ad minores terminos reduci necesse est.

Rursus si numerus fractus sit mixtus, opus est reductione ad simplicem fractionem: ut supra dictum in extractione aliarum radicū.

σχόλιον.

1. Extractio radicis censicensicæ est lateris censicensici inuestigatio.

2. Censicensicè multiplicare est numeri quadratum in se multiplicare: vel, quod idem est, radicem quadruplare. Sic enim dico 2 duo sunt quatuor: quater quatuor sunt 16. Vel sic 2 duo sunt 4: bis 4, 8, bis octo sunt 16.

3. Numeris in dupla progresione dispositis censicensicus est cubus duplicatus: in tripla est cubus triplicatus, & sic de alijs: ut hic.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Hic 8 cubus duplicatus facit 16, censicensum. Et 27 cubus triplicatus facit 81, censicensum.

4. Productum duarum radicum censicensicarum est æquale radici extractæ ex producto duorum censicensiorum in se ductorum. Speciale deductum ex generali axiomate 18: ut

Duæ radices. Duo biquadrati.

2. 3. 16. 81.

6 1296

6

5. Modus operandi supra adhibitus facilior est, quàm, qui vulgo traditur: ex uniuersali theoremate inter principia posito dependens: estque hic.

ἐκθ. Sit 9834496 numerus verè censicensicus.

Δ. Oportet *dati numeri radicem censicensicam extrahere.*

Κατασκ. 1. DISTINCTIO numeri 983'4496': punctis supra quintum collocatis.

2. EXTRACTIO radicis simplicis. Radix simplex per tabellam supra positam de 983 est 5, scribenda post semicirculum. Iam 5 censicensicè multiplicatum facit 625: quæ scripta sub figuris ultimi pun-

mi puncti & subtracta à 983 relinquunt 358.

3. DIVISIO: in qua primum diuisor inuenitur sic.

1. Quadruplum radicis in 20, scribendum proximè ante punctũ.

2. Triplum radicis in dimidium quadrupli est 150, scribendum sub figura secunda. Dimidium enim est 10: & triplum 15. Hoc & sextuplum quadratum primi lateris dicitur.

3. Duplum radicis in trientem producti tripli radicis in dimidium quadrupli est 500. Nam duplum radicis est 10. Triens producti tripli radicis est 50: quia 3 in 150 habetur quinquagies. Hoc scribendum sub figura tertia: estq; diuisor cui subscribenda linea. Hic & quadruplus cubus primi lateris vocatur.

Secundo fit diuisio sic.

Quinq; in 35 habetur sexies: sex scribuntur post semicirculum, iuxta priorem radicem 5.

Numerus censicensicus ex 6 est 1296, per tabellam. Cubus radicis est 216, qui ductus in primum numerum, id est, quadruplum radicis facit 4320.

Quadratum radicis in secundum, id est, productum tripli radicis in dimidium, siue 150, est 5400. Est enim quadratum senarij 36, quod ductum in 150, facit 5400.

Ipse numerus in diuisorem ductus facit 3000. Est enim productum 6 in 500.

Quæ scribenda & addenda, & subtrahenda sunt à numero reliquo, ut apparet in subiecto schemate.

358
9834496 (56.
625

Quadruplum latus -- 20. quadruplum radicis.
Sextuplũ quadratũ 150. triplum radicis in dimidium.
Quadruplus cu-- 500. duplum radicis in trientẽ. Diuisor.
bus primi lateris

 liqua-

Biquadratus lateris secundi. 1296.
A cubo secundi in quadruplum lateris primi. 4320.
A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi. 5400.
A latere secundo in quadruplum cubum primi lateris. 3000.

1296.	*Numerus inuent. zensizens.*
4320.	*Eius cubus in primum.*
5400.	*Eius quadratum in secundum.*
3000.	*Ipse numerus in diuisorem.*
3584496.	*Subtrahendus numerus.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico propositi numeri 1834496 radicem censicensicam esse 56.*

Ἀπόδειξις est similis demonstrationi extractionis radicis cubicæ. Numerus enim propositus censicensicus signatur duobus punctis, tribus intermedijs omissis, & sic censicensus siue biquadratum uniuersale tot particularibus biquadratis constabit: latusq́; similiter uniuersale tot particularibus lateribus diuidetur: eritq́; biquadratum lateris primi 625.

Plus biquadrato lateris secundi.

Plus lateris secundi cubo in latus quadruplum primi.

Plus lateris secundi quadrato in quadratum sextuplum lateris primi.

Plus latere secundo in cubum quadruplum lateris primi, æquatum biquadrato uniuersali.

6. Δοκιμασίαι huius extractionis duæ sunt: una biquadratæ radicis multiplicatio: altera per abiectionem nouenarij aut septenarij.

Biquadrata multiplicatio est, ut uidelicet radix inuenta in se multiplicetur censicensicè & conferatur productum cum numero proposito. Huic enim si æquale sit, indicium est rectè inuentæ radicis. Quod si in extractione aliquid fuit relictum, illud additum producto numero numerum propositum conficiet. Sic si ex inuenta radice abijciuntur 9 vel 7, quoties fieri potest: & residuum collocetur tum in sinistra parte crucis, tum in dextra, cùm quotus siue radix sit etiam instar diuisoris. Quo residuo in se censicensicè multiplicato: & ex producto abiectis 9 vel 7 necesse est residuum hoc esse æquale residuo numeri propositi, si abijciuntur ex eo omnia 9 vel 7, & nihil in extractione relictum sit. Quod si aliquid remanserit, ex eo & producto radicis inuentæ in se multiplicatæ abijci debent omnia

omnia 9 vel 7. Hoc enim residuum æquale esse debet residuo numeri propositi, si omnia 9 vel 7 abijcientur.

In nostro exemplo si probatio instituatur per biquadratam multiplicationem, & 56 radix biquadratè multiplicetur, productum erit 9834496. Si per 9 fiat, residuum ex radice & diuisore est 2, quod biquadratè multiplicatũ facit 16, ex quo abiectis 9, remanent 7. Et tantum quoque remanet 9 abiectis ex producto. Si vero fiat per 7, stabit exemplum δοκιμασίας, ut hic apparet

6
4 ✕ 4
6

Extractioni radicis censicensicæ tres sequentes numeri Stifelij seruiunt 4000, 600, 40, Algebrici vero 4 ℭ, 6 ȝ & 4 ℞. *Hæc uero* extractio breuius per solos numeros quadratæ extractionis bis adhibitis perficitur.

EXTRACTIO RADICIS SVRDESOLIDÆ.

πρότασις. Dati cuiuscunq; surdesolidi radicem extrahere.

Totidem sunt casus huius extractionis, quot priorum extractionum.

ἔκθ. primi casus. *Sit numerus surdesolidus 32768, isq; minor 59049.*

Δ. Oportet *ex dato numero radicẽ surdamsolidam extrahere.*

Κατασκ. *Cum numerus datus sit minor surdesolidis singulorum digitorum: radix illius quærenda est, vel per multiplicationem surdesolidam: vel ex tabula, quæ habetur supra axiomate 12, inter principia.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 8 esse radicem surdesolidã numeri 32768.*

Ἀπόδειξις ex definitione radicis surdesolidæ innotescit. Nam quadratum 8 est 64: cubus eiusdem 512. Iam 64 ducta in 512 faciunt 32768. Non potest autem resolui in quadratum, eo quod ut supra dictum, surdus est, quantum ad radicem quadratam attinet.

ἔκθ. Secundi casus. Sit numerus 79'62624', verè surdesolidus, isq; minor 59049.

Δ. Oportet *dati numeri radicem surdesolidam extrahere.*

KAT. *Extractionis huius totidem sunt partes, quot aliarum extractionum.*

1. Distinctio *numeri. Puncta sunt collocanda supra quotum hoc modo, 79'62624'.*

2. Extractio *radicis simplicis.*

Radix simplex per tabellam supra positam de 79 est 2, scribenda, post semicirculum. Iam 2 surdesolidemultiplicata faciunt 32. Nam 4 in 8 faciunt 32. Est autem 4 quadratum: 8 cubus binarij. Iam 32 planosolidum ablatiuum subtractum à 79 reliquunt 47, quibus additi cæteri numeri faciunt 4762624, reliquum resoluendi surdisolidi.

3. DIVISIO, in qua primum diuisor inuenitur sic.

1. Quintuplum radicis 10, scribendum proximè ante punctum.

2. Quadruplum radicis, in quintupli dimidium 40, scribendum sub figura secunda. Appellatur & decuplum quadratum radicis. Est enim quadruplum radicis 8, & dimidium quintupli 5. Vel decies 4 sunt 40.

3. Triplum radicis in prioris producti trientem, 80. Nam triplum radicis est sex: productum quadrupli est 40: cuius triens sunt $\frac{40}{3}$. Iam 6 in $\frac{40}{3}$ faciunt 80. Vocatur & decuplus cubus radicis. Nam cubus lateris est 8, qua decies sumta faciunt 80: scribenda sub figura tertia.

4. Duplum radicis in $\frac{1}{4}$ est similiter 80. Nam duplum radicis est 4, producti prioris quadrans est 20. Iam 20 ducta in 4 faciunt 80. Vocatur & quintuplum biquadratum radicis. Nam biquadratum radicis est 16: qua quinquies sumta 80 constituunt, scribenda sub figura quarta: estq; diuisor: cui subducenda est linea.

Secundo fit diuisio sic. Octo in 47 habetur 4: quatuor scribuntur post semicirculum iuxta priorem radicem 2.

Numerus surdesolidus ex 4 est 1024, per tabellam. Biquadratus lateris secundi.

Biqua-

Biquadratum radicis est 256, qui in primum, id est, quintuplum radicis ductus facit 2560. Est enim quintuplum 10.

Cubus radicis secunda in secundum ductus est similiter 2560. Nam cubus radicis secunda est 64: secundus est 40. Iam 64 in 40 ducta faciunt 2560.

Quadratum lateris in tertium productum est 1280.

Ipsa radix inuenta in postremum, siue quartum productum est 320. Appellatur & prisma à latere secundo in quintuplum.

Quæ scribenda & addenda & subtrahenda sunt à numero reliquo, ut apparet in sequenti schemate.

47
~~7~~~~9~~62624' (24.
~~52~~

10
40
80
80

Biquadratus lateris secundi.	1024.	Surdum solidum.
A biquadrato secūdi in quintuplum latus primum.	2560.	Biquadratum in primum.
A cubo lateris secundi in decuplum quadratum primi.	2560.	
A quadrato lateris secundi in decuplum cubum primi.	1280.	Cubus radicis in secundum.
A latere secundo in quintuplum biquadratum primi.	320.	Radix in postremum.
	476262'4.	Summa prismatum æqualis residuo resoluendi surdisolidi.

Ἐκθ. tertij casus. Sit 12 numerus non verè surdus solidus.

Δ. Oportet *dati numeri radicem surdam solidam vera tàm propinquam inuenire, ut ne centesima aut millesima, aut alia quauis pars desit.*

Κανων. *Primùm multiplica surdesolidè numerum (cuius partem deesse nolis) significantem partes, Productū erit denominator.*

2. Idem productum multiplica in numerum propositum, cuius radix proxima quæritur. Productum erit numerator.

3. Ex utroq; producto extrahe radicem surdam solidam.

4. Radicem numeratoris pone supra: denominatoris infra, instar fractionis interposita lineola.

5. Valorem fractionis inuestiga per diuisionem: ut in proposito exemplo velim radicem surdam solidam quærere in partibus centesimis.

100 igitur multiplico surdesolidè & prodeunt 10000000000 denominator. Hoc productum duco in 12, numerum propositum, & fiunt 120000000000. numerator.

Ex utroq; producto extrahens radicem surdam solidam, inuenio radicem numeratoris 151 & paulò plus: radicem denominatoris 100: unde fit hæc fractio $\frac{151}{100}$, cuius valor per diuisionem est $1\frac{51}{100}$ siue $\frac{1}{2}$ ferè minor verâ: addita vero unitate, cum in extractione remanserit *$\frac{807274249}{10000000000}$: $1\frac{52}{100}$ maior verâ.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico radicem surdesolidam numeri 12 esse $1\frac{51}{100}$ minorem verâ: vel $1\frac{52}{100}$ minorem verâ.*

Ἐκθ. quarti casus. Sit numerus fractus $\frac{1}{32}$.

Δ. Oportet *dati numeri fracti radicem surdam solidã inuenire.*

Κατ. *Primùm si fractio constet ex numeris compositis, redigenda est ad minimos terminos: deinde si numerator & denominator sunt surdesolidi, quære latus numeratoris: & id pone supra lineolam: deinde denominatoris: & id pone infra lineolã. Est igitur fractionis $\frac{1}{32}$ radix surdasolida $\frac{1}{2}$. Sic $\frac{32}{243}$ est $\frac{2}{3}$. Et $\frac{243}{1024}$ est $\frac{3}{4}$: & sic deinceps.*

Quod si partes fractionis non sint verè surdesolida appone cifras quinq;, & ex productis extrahe radices surdesolidas, ut in numeris integris: vel duc quadratum quadrati denominatoris in numeratorem: & producti sume latus propinquum: & id diuide per denominatorem. Exiens est latus propinquum quæsitum. Sic latus biquadratum $\frac{5}{8}$ est ferè $\frac{115300}{127680}$. Nam biquadratum 8 est 4096, quod

ductum

ductum in 5 facit 20480 cuius latus surdesolidum propinquum est $7\frac{3677}{15960}$: quo per 8 denominatorem diuiso exit $\frac{115397}{127680}$.

Rursus si numerus fractus sit mixtus, redigendus est ad simplicẽ fractionem, & supputanda radix, ut antea.

σχόλιον.

Extractioni radicis surdesolidæ quatuor sequentes numeri Stifelij seruiunt, 50000, 10000, 1000, 50. Algebrici verò sex, 1 ß 5 ʒʒ ✠ 10 ꝗ ✠ 10 ʒ, ✠ 5 ℞ ✠ 1.

EXTRACTIO RADICIS CENSI-CVBICA.

πρότασις. Dati cuiuscunque censicubici radicem extrahere.

Totidem sunt casus huius extractionis, quot priorum extractionum.

ἔκθ. primi casus. *Sit numerus censicubicus 15625, isq; minor quàm 10077696, ultimo ex nouem censicubicis digitorum.*

Δ. Oportet *ex dato numero radicem censicubicam extrahere.*

κατασκ. *Nulla opus est, cum radix quæsita in superiori tabula axiomate 9 inter principia reperiatur, nempe 5.*

ἀπόδειξις *est analysis propositi censicensici, exponens quot productis quilibet censicensicus æqualis sit.*

Aequatur autem cubo & quadrato, ut nomen indicat. Extracturus igitur radicem censicensicam extrahe primò radicem quadratam: & ex hac deinde radicem cubicam. In dato exemplo radix quadrata primum est, 125: deinde huius radix cubica 5. Erit igitur radix censicubica numeri propositi 15625 quinq;.

συμπέρ. *Ergo dati numeri verè censicubici 15625 radix vera censicensica extracta est,* quod fecisse oportuit.

Similis est extractio radicum censicubicarum ex numeris aliorũ casuum quorumcunq;. Vt radix censicubica 7962624 est præcisè 24. Radix de 200000 non est censicubicus numerus accuratè: radix

autem

autem proxima vera est additis quinis cifris, quoties visum fuerit. $11\frac{38040}{57781}$, *radix minor vera: vel* $11\frac{38040}{57780}$, *maior vera. Media satis propinqua* $11\frac{77808}{175561}$.

Radix $\frac{1}{64}$ *est* $\frac{1}{2}$ *exquisitè.*

Radix $\frac{7}{9}$ *non accurata inuenitur additis quinis cifris: vel per rationem priore propositione indicatam est* $\frac{2305567}{2413664}$. *Nam, ut in praecedenti propositione dictum, surdesolidus 9 est 59049. quod ductum in 7 numeratorem facit 413343, cuius latus censicubicum* $8\frac{151150}{160206}$, *quo per 9 denominatorem diuiso exit* $\frac{2305567}{2413664}$.

σχόλιον.

1. Extractioni radicis censicubicæ quinque sequentes numeri Stifelij inseruiunt 600000, 150000, 20000, 1500, 60. Algebrici vero septem, 1 ßß ✠ 6 ß ✠ 15 ß ✠ 20 ß ✠ 15 ß ✠ 6 ℞ ✠ 1.

2. Extractioni radicis bsurdesolidæ sex Stifelij inseruiunt, 7000000. 2100000. 350000. 35000. 2100. 70. Algebrici vero octo hi. 1 Bß ✠ 7 ß ✠ 21 ß ✠ 35 ß ✠ 35 ß ✠ 21 ß ✠ 7 ℞ ✠ 1.

3. Extractioni aliarum radicum alij seruiunt numeri simili ratione, quarum cum sit prolixior supputatio: & rarissimus, vel potius nullus usus: eos hic prætermittemus, & magis necessaria explicabimus. Dictum autem supra est in numeris non verè quadratis, & aliter denominatis non posse veram radicem in numeris extrahi: in lineis posse. Potest autem id fieri per medias proportionales: ac unam quidem in radice quadrata: duas in radice cubica: tres in radice censicensica: quatuor in radice surdesolida: quinque in radice censicubica, & sic deinceps. Modum in radice quadrata hic solum ostendemus, ad cuius similitudinem aliæ extractiones Geometricæ fieri possunt.

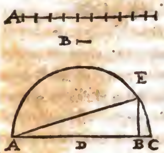
πρότασις. Radicem quadratam in numero non quadrato per lineam Geometricam inuenire.

ἐκθ. *Sit datus numerus 10, representans quadratum 10 palmorum superficialium.*

Δ. Oportet *huius numeri radicem, siue latus quadratum Geometricè inuestigare.*

Κατ. *Capiatur primò linea A palmorum 10: & linea B palmi- unius:*

unius: deinde per 13 sexti, inueniatur C media proportionalis inter A & B, hoc modo. Coniungantur ἐπ' εὐθείας duæ rectæ datæ A & B: ex his deinde composita A C bifariam diuisa, in puncto D, ex puncto diuisionis super ipsam totam, ad interuallum alterutrius medietatis semicirculus A E C describatur. Tandem à puncto coniunctionis datarum B, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea B E ad circumferentiam usq; ducatur, quæ erit media proportionalis inter A B, & B C.



Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico rectam B E esse radicem quadratam, siue latus quadratum numeri A, 10.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 17. sexti. Si tres lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Hic sunt tres lineæ proportionales B C, A B, & B E per κατασκ. Ergo rectangulum sub medijs A B & B C æquale est quadrato, quod à media B E describitur.

2 Syll. Sententia Data longitudine & latitudine rectanguli dabitur illius area per multiplicationem. Rectanguli sub AB & BC datur lõgitudo 10, latitudo 1 palmi. Ergo p multiplicationẽ area est 10 pal.

3 Syll. Sententia. Æqualium æquales sunt areæ. Ergo & quadrati ex B E area est 10. siue linea C.

4 Syll. Sententia. Data area quadrati, dabitur illius latus siue Arithmeticum, siue Geometricum. Arithmeticum per extractionem radicis quadratæ exquisitum in numeris verè quadratis: non exquisitum in numeris non verè quadratis. Geometricum vero exquisitum semper, per præcedentem κατασκευήν. Hic datur area quadrati 10, qui numerus est non verè quadratus. Ergo latus illius in numeris nullum exquisitum est: proximum verò, idq; paulo minus vero est $3\frac{1}{6}$: paulo maius vero $3\frac{1}{7}$. Geometricum vero exquisitum est latus B E.

Maior difficultas est in extractione cubica, & alijs figuris solidis, eò quod nemo ad hãc usq; diẽ verè ac Geometricè duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Errori quidem minus obnoxias multi tradiderunt, erroris autem omnis expertes nemo.

autem proxima vera est additis quinis cifris, quoties visum fuerit. $11\frac{38040}{87781}$, *radix minor vera: vel* $11\frac{38040}{87780}$, *maior vera. Media satis propinqua* $11\frac{77808}{175561}$.

Radix $\frac{1}{64}$ *est* $\frac{1}{2}$ *exquisitè.*

Radix $\frac{7}{9}$ *non accurata inuenitur additis quinis cifris: vel per rationem priore propositione indicatam est* $\frac{2305567}{2411664}$. *Nam, ut in præcedenti propositione dictum, surdesolidus 9 est 59049, quod ductum in 7 numeratorem facit 413343, cuius latus censicubicum* $8\frac{151150}{180206}$, *quo per 9 denominatorem diuiso exit* $\frac{2305567}{2411664}$.

σχόλιον.

1. Extractioni radicis censicubicæ quinque sequentes numeri Stifelij inseruiunt 600000, 150000, 20000, 1500, 60. Algebrici vero septem, 1 ßcƒ + 6 ß + 15 ʒ + 20 cƒ + 15 ʒ + 6 ℞ + 1.

2. Extractioni radicis bsurdesolidæ sex Stifelij inseruiunt, 7000000. 2100000. 350000. 35000. 2100. 70. Algebrici vero octo hi. 1 B ß + 7 ʒ cƒ + 21 ß + 35 ʒʒ + 35 cƒ + 21 ʒ + 7 ℞ + 1.

3. Extractioni aliarum radicum alij seruiunt numeri simili ratione, quarum cum sit prolixior supputatio: & rarissimus, vel potius nullus usus: eos hic prætermittemus, & magis necessaria explicabimus. Dictum autem supra est in numeris non verè quadratis, & aliter denominatis non posse veram radicem in numeris extrahi: in lineis posse. Potest autem id fieri per medias proportionales: ac unam quidem in radice quadrata: duas in radice cubica: tres in radice censicensica: quatuor in radice surdesolida: quinque in radice censicubica, & sic deinceps. Modum in radice quadrata hic solum ostendemus, ad cuius similitudinem aliæ extractiones Geometricæ fieri possunt.

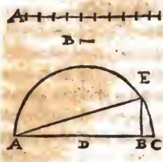
πρότασις. Radicem quadratam in numero non quadrato per lineam Geometricam inuenire.

ἔκθ. *Sit datus numerus 10, representans quadratum 10 palmorum superficialium.*

Δ. Oportet *huius numeri radicem, siue latus quadratum Geometricè inuestigare.*

Κατ. *Capiatur primò linea A palmorum 10: & linea B palmi unius:*

unius: deinde per 13 sexti, inueniatur C media proportionalis inter A & B, hoc modo. Coniungantur ἐπ' εὐθείας duæ rectæ datæ A & B: ex his deinde composita A C bifariam diuisa, in puncto D, ex puncto diuisionis super ipsam totam, ad interuallum alterutrius medietatis semicirculus A E C describatur. Tandem à puncto coniunctionis datarum B, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea B E ad circumferentiam usq; ducatur, quæ erit media proportionalis inter A B, & B C.



Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico rectam B E esse radicem quadratam, siue latus quadratum numeri A, 10.* Ἀπόδειξις.

1 Syll. 17. sexti. Si tres lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Hic sunt tres lineæ proportionales B C, A B, & B E per κατασκευήν. Ergo rectangulum sub medijs A B & B C æquale est quadrato, quod à media B E describitur.

2 Syll. Sententia. Data longitudine & latitudine rectanguli dabitur illius area per multiplicationem. Rectanguli sub AB & BC datur lõgitudo 10, latitudo 1 palmi. Ergo p multiplicationẽ area est 10 pal.

3 Syll. Sententia. Æqualium æquales sunt areæ. Ergo & quadrati ex B E area est 10. siue linea C.

4 Syll. Sententia. Data area quadrati, dabitur illius latus siue Arithmeticum siue Geometricum. Arithmeticum per extractionem radicis quadratæ exquisitum in numeris verè quadratis: non exquisitum in numeris non verè quadratis. Geometricum vero exquisitum semper, per præcedentem κατασκευήν. Hic datur area quadrati 10, qui numerus est non verè quadratus. Ergo latus illius in numeris nullum exquisitum est: proximum verò, idq; paulo minus vero est $3\frac{1}{7}$ paulo maius vero $3\frac{1}{6}$. Geometricum vero exquisitum est latus B E

Maior difficultas est in extractione cubica, & alijs figuris solidis, eò quod nemo ad hãc usq; diẽ verè ac Geometricè duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Errori quidem minus obnoxias multi tradiderunt, erroris autem omnis expertes nemo.

ARITHMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ LIBER QVINTVS.

DE NVMERO COSSICO.

DEFINITIONES.

1. Numerus Cossicus est, numerus figuratus progressionis Geometricæ, qui characteribus cossicis notatur. Vocatur & creatus & radicalis: eò quod numeri quidem cuiuslibet usus in Algebram cadit: sed eius imprimis, qui radicem habet: & à radice procreatur. *Stifelius* denominatum vocat.

2. Denominatus est duplex: alius vulgariter, alius cossicè. Vulgariter denominatus est contractus ad certam materiam, nulla lege proportionis mutuæ cum altero habita, ut 18 fl. 3 ligna. 4 toni.

3. Denominatus Cossicè est, qui habet certam analogiam, qua cum altero colligatur, isque vel rationalis, vel irrationalis, vel compositus ex utroque.

4. Denominatus rationalis est, qui constat numero absoluto, & charactere postposito, ut 2 ℞ duæ radices, 3 ʒ tres cēsus, 4 ¢ quatuor cubi.

5. Denominatus irrationalis est, cuius absoluta particula radice caret, quam character refert: ut √ʒ 20 ℥, radix quadrata viginti, quæ quidem nulla est, cùm nullus sit numerus, qui in se ductus producat 20. Stifelius absurdos vocat. Habet autem duplex signum, unum in parte sinistra, alterum in parte dextra: illud *radicale*: hoc *Cossicum* appellari solet.

6. Denominatus compositus est, in quo numerus absolutus inter duos characteres medius est: ut √ʒ 8 ¢. hoc est, radix quadrata 8 cuborum.

7. Rur-

7. Rursus cossicorum rationalium & irrationalium, alius simplex, alius compositus. Simplex est non affectus signo prosthaphæretico, ut 20 ℨ. Et √ ℨ 20 ß. Ille rationalis: hic irrationalis, quem Algebræi medialem vocant, quod eius officio inter duos numeros rationales non quadratos medium proportionale reperiatur. Compositus, qui contrà: isq; vel abundans, vel diminutus, vel mixtus. Abundans, cui alius numerus accedit interpositione signi + adiunctus, ut 20 ℨ + 12, viginti quadrata plus duodecim. Et √ ℨ 20 ℞ + √ ℨ 8, isque bimedialis, quod duobus medialibus constat.

Diminutus, cui decedit aliquis numerus, signo --- detractus, ut 20 ℨ --- 12, viginti quadrata minus duodecim. Et √ ℨ 20 --- √ ℨ 8.

Mixtus est, cui utrunque signum interponitur, ut 20 ꝗ + 8 ℨ --- 5, viginti cubi, plus octo censi, minus 5 unitates. Numerus enim, qui post se non habet characterem aliquem Cossicum, significat numerum absolutum ex unitatibus compositum. Et sic √ ℨ 17 --- 40 ℞ + √ ℨ 3.

8. Algebræi duos numeros quosuis copulatos per signũ + binomium appellare solent, ut √ ℨ 12 + √ ℨ 18. Copulatos vero per signum --- residuum, vel apotomen, latinè recisum, ut √ ℨ 12 --- √ ℨ 18. Plures autem numeros, per signum + copulatos, dicere consueuerunt trinomium, quatrinomium, &c.

9. Rursus Cossicorum alius integer, alius fractus.

Integer est, cuius figura simplex est, nullam particulam adnexam habens, ut 20 ℨ.

Fractus est, cuius figura duobus numeris cossicis interiecta virgula scribitur, ut $\frac{3}{4}$ ℞. Effertur autem vel hoc modo: tres radices diuisæ per quatuor: vel, ut vulgo usitatum est, tres quartæ radicis. Illa prolatio dilucidior, hæc obscu-

rior. Illa enim fractionis valorem ceu exprimens ostendit simul & quo pacto is erui debeat. Et rursus fractus cossicus alius rationalis, alius irrationalis. Rationalis, ut $\frac{3}{4}$ ℞. Irrationalis est, cui character præponitur: eaque vel in medio: vel superiore vel inferiore loco. Cui signum in medio ponitur, totam fractionem respicit, ut $\sqrt{ȝ}\,\frac{9}{16}$, id est, $\sqrt{ȝ}$ 9 diuisa per $\sqrt{ȝ}$ 16, vel radix censica nouem decimarum sextarum, hoc est, $\frac{3}{4}$. Superiore loco positum tantum numeratorem respicit, ut $\frac{\sqrt{ȝ}\,9}{16}$ id est, radix censica nouem diuisa per 16 siue $\frac{3}{16}$, tres decimæ sextæ. Inferiore loco positum, tantũ denominatorem respicit, ut $\frac{9}{\sqrt{ȝ}\,16}$ nouem diuisa per $\sqrt{ȝ}$ 16. Sola vero hic proportio spectatur, sicut in cæteris minutiarum generibus, ut $\frac{\sqrt{ȝ}\,9}{4}$ $\sqrt{ȝ}\,\frac{9}{4}$ & $\sqrt{ȝ}\,\frac{9}{256}$, idem significant. In denominatis vero rationalibus nihil refert, quocunq; loco characterem posueris, ut $\frac{9}{16}$ ȝ | $\frac{9}{16}$ ȝ | $\frac{9}{16}$ ȝ, id est, nouem decimas sextas quadrati, nouem quadrata diuisa per 16, nouem decimas sextas quadrati.

10. In numero Cossico consideratur progressus, nomen, expositio, character, nomina characterum & valores, situs & locus.

11. Progressus est continua numerorum secundum proportionem Geometricam ab unitate incipientium series. Est igitur nihil aliud quàm progressio Geometrica. Incedit autem, ut supra diximus, progressio sub ratione dupla, tripla, quadrupla, quintupla, & sic deinceps. V. G. Sub ratione dupla. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

NOMEN. 1. Sui ipsius radix & creatio est. 2. radix est cæterorum 4 quadratus: 8 cubus: 16 biquadratus: 32 sursolidus: 64 quadratocubus: 128 bsursolidus, & sic deinceps in infinitum.

EXPOSITIO est series numerorum naturalis ab unitate proce-

procedentium: qui singulos terminos cossicos exponunt: unde & numeri illi characteristici indices, & exponentes vocantur. Exponunt enim, siue indicant quotum à radice terminum progressionis character quilibet referat: & qui quouis loco sit collocandus, quóue modo componendus. Est igitur radix prima quantitas: census secunda: cubus tertia, & sic deinceps. Scribuntur autem vulgo Arithmeticis characteribus: dilucidius vero latinis literis.

CHARACTER est figura qua numerus cossicus pingitur: estq́; vel simplex vel compositus. Simplex est *ἀσύνθετος*, isq́ue aut principalis, aut minus principalis. Principalis est quadruplex ℞ ʒ ȼ ß. Minus principalis, *b* ß, *c* ß, *d* ß, *e* ß, & cæteri. Hi numeri se habent instar cifræ & nouem digitorum, ex quibus infinita compositorum numerorum series conficitur. Compositus est *σύνθετος*, qui ex aliquo simplicium principalium iuncto atque coaptato conficitur, & perpetua serie continuatur, ut ʒʒ, ʒȼ, ʒʒʒ, ȼȼ, *b* ß.

TABVLA ALPHABETI COSSICI IN DVPLA PROGRESSIONE.

Exponentes.	o	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
Charact.	𝔖	℞	ʒ	ȼ	ʒʒ	ß	ʒȼ	*b* ß	ʒʒʒ	ȼȼ	ʒß.
Num. progres.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

Exponen.	XI.	XII.	XIII.	XIIII.	XV.	XVI.
Charact.	*c* ß	ʒʒȼ	*d* ß	ʒ*b* ß	ȼß	ʒʒʒʒ
Num. progr.	2048.	4096.	8192.	16384.	32768.	65936.

NOMINA ET VALORES CHARACTERVM PRÆCIPVORVM.

1. 𝔖 Græci drachmam vocant: Latini numerum: valet omnem numerum absq; ullo nomine: eumq́; vel integrum & absolutum vel

 fractum.

fractum. Integrum, ut 5. 8. 9. Fractum, ut ½. ⅓. Est autem initium radicum, ut unitas numerorum: unde & unitatem appellant. Vt enim unitatum multitudo est numerus: sic drachmarum coaceruatio radices parit: quæ rursus coaceruatos cæteros progreßionis terminos procreant. Itaq. v. g. 5 ℨ nihil aliud sunt quàm unitates quinq. Plerũq. tamen hic character non solet numeris apponi, quando pro absolutis habendi sunt, cumq. non sit coßicus, nihil exponit. signatur etiam sic. N.

2. ℞ Geometræ Græcè πλευρὰν, Latinè latus. Arithmetici radicem vocant: Itali cossam & rem: valet omnem numerũ πορισὸν, qui in se ductus parit quadratum. Est antẽ numerus unitati proximus, à quo progreßio suum nomen sortitur. In progreßione igitur dupla radix est 2: in tripla 3: in quadrupla 4, & sic deinceps. Potest enim quilibet numerus esse radix: eaq. vel quadrata, vel cubica, vel alterius generis. Et sic multum differunt 2 ℨ aureorum, & 2 ℞ aureorum. Nam duæ drachmæ aureorum faciunt duos aureos; duæ vero radices aureorum totidem vel plures aureos, prout una radix æstimabitur: ac 2, quidem in progreßione dupla: tres in progreßione tripla: 4 in progreßione quadrupla, & sic deinceps. Radix appellatur per similitudinem. Vt enim radix physica est ima pars montis vel arboris: sic radix Arithmetica est principium, & fundamentum quadrati, & cæterorum numerorũ Coßicorum. Signatur etiam sic ℛ vel sic Co, quod cossam innuit, vel sic L. quod sit linea siue latus quadrati. Græci sic notant. πλ. Radices vero surdas, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt pleriq. notant, hoc signo √, quod statim insequitur character Coßicus ʒ, vel ℭ vel ʒʒ: prout radix illa est quadrata, vel cubica, vel censicensica. hoc modo, √ʒ 12. id est, radix quadrata numeri 12. Cubicam vero quidam sic notant √√: radicem radicis sic √√. Nota vero illa √ à litera l videtur desumta, ut latus significet, nempe quadrati. Nec illud ignorandum, quotiescunq. nominatur aut notatur radix alicuius numeri, intelligi

intelligi radicem quadratam simpliciter tum à nobis interdum, tum apud alios scriptores.

3. ʒ Graeci δύναμιν & τετράγωνον, Latini potestatem in genere & in specie quadratum vocant. Algebrai censum, quòd constat multis cellulis quadratis & velut annuus reditus ex radice in se ducta oritur: valet infinita quadrata: ut radix infinitos numeros. In progressione igitur dupla 1 quadratum est 4: in tripla 9: in quadrupla 16, & sic deinceps. Hinc duo quadrata aureorum faciunt vel 4, vel 9, vel 16: vel plures aureos prout unum quadratum aestimabitur. Alij ita designant charactere q, vel sic ce. Graeci sic $\overset{\ddot{\upsilon}}{\Delta}$.

4. 𝔠 Graeci κύβον, Latini cubum vocant: valet infinitos cubos: facit in progressione dupla 1 𝔠 8: in tripla 27: in quadrupla 64, & sic deinceps. Alij sic notant: cu. vel C. Graeci sic $\overset{\ddot{\upsilon}}{K}$.

5. ʒʒ, Graeci δυναμοδύναμιν: Latini biquadratum & quadratoquadratum & quadratum de quadrato & quadratiquadratum: Algebrai censicensicum vel zensdezenso vocant: valet in progressione dupla 1 ʒʒ, 16: in tripla 81: in quadrupla 256. Nonnulli ita signant q q, vel sic Q Q. Graeci sic $\overset{\ddot{\upsilon}\ddot{\upsilon}}{\Delta\Delta}$.

6. ß. Latini supersolidum. Algebrai sursolidum, Itali Relatum primum vocant: valet 1 ß partes 32, in progressione dupla: in tripla 243, in quadrupla 1024: alij notant sic. REL. P. vel sic ß. Diophanto & Vieta sic. ʒ𝔠.

7. ʒ𝔠, Graeci δυναμόκυβον: Latini quadraticubum: Diophantus & Vieta cubocubũ. Algebrai zensicubũ, vel censicubum, & quadratum cubi, & cubicensum, & cubum quadrati vocant: valet in progressione dupla 1 ʒ𝔠, 64: in tripla 729: in quadrupla 4096. Eadem ratio caeterorum est characterum. Nostro enim instituto hi sufficiunt.

Alij

8. Alij,ijq; infiniti characteres, per exponentes numeros, sic inueniuntur. Animaduerte duos pluresúe numeros, ex quorum multiplicatione exponens numerus conflatur. Eorum notas simul iunge & habebis characterem ipsius exponentis. V. G. Si quæratur quis character ad hunc exponentem sex pertineat, sex resoluo in 3 & 2. Ex horum enim multiplicatione sex exurgunt, quorum notæ sunt ʒ & ꝗ: quæ iunctæ faciunt ʒꝗ. Quod si exponens sit numerus primus, tantum obserua quotus sit ordine à quinario inter numeros primos. Nota enim exponentis 7, qui est proximus primorum à quinario est bß, sicut ex triplici ordine perspicitur. Nota 11 erit cß: 13 dß: 17 eß, sicq; in reliquis. Horum supersolidorum ordinem elemētis alphabeticis designamus, ne notæ Arithmeticæ cæteros numeros conturbent.

9. E contrario characteres ad proprios exponentes sic reducuntur. Singulis characteribus incompositis singulos exponentes tribue: hos inter se multiplica & exurget exponens quæsitus: ut huius characteris ʒʒꝗ, qui compositus est ex his tribus ʒ. ʒ. ꝗ. Capiemus horum exponentes 2. 2. 3. ex superiori progressione primorum numerorum, eosq; inter se multiplicabimus. Nam productus numerus 12 est exponens dicti characteris ʒʒꝗ. Sed hæc artis demonstrationem magis, quàm usum exhibent.

10. Hæ notæ ℞ ʒ ꝗ characteres: hæ vero + --- signa vitandæ confusionis gratia rectius appellantur.

11. Signa + & --- prosthaphæretica vocantur: ac + plus siue &: --- minus significat: & sic exprimuntur. 6 ʒ. + 8 ℞. sex census plus siue & 8 radices. 6 ʒ --- 8 ℞. sex census, minus octo radices, siue quibus 8 ℞. decedunt.

12. Numeris quos nulli alij antecedunt, siue absoluti illi fuerint siue Cossici neutrum signorum prosthaphæreticum præponitur expressè: omnibus tamen illis signum + aut imaginatione præfigendum, aut adesse intelligendum est. Huius regulæ magnus est usus in

tota

tota Algebra: ut his numeris 4 ℞ ✚ 8 : item 8 ℞ ✚ 12 prioribus radicum numeris, id est, 4 ℞, & 8 ℞ præfixum imaginamur signum ✚, etsi præpositum illis non est.

σχόλιον.

Numeri irrationales, Græcis ἄλογοι, q. expertes rationis dicuntur non aliter quàm stellæ quædam appellari erraticæ, siue planetæ solent. Cadunt enim sub regulam, ut numeri rationales.

Irrationales autem dicuntur, quod non sunt veri numeri, quia nec integri nec fracti: sunt vero numerorum imagines, & velut umbræ, ut bruta hominum, quæ præter id quod sentiunt, suo etiam modo ratiocinantur.

Non sunt integri, eò quod integer non cadit inter duos aliquos numeros immediatos: irrationalis cadit: ut inter 2 & 3 nullus cadit numerus integer: cadit autem √ȝ 6, numerus irrationalis.

Non sunt fracti, eò quod ex multiplicatione fracti numeri in se non fit numerus integer: fit autem ex multiplicatione irrationalis in se: ut $\frac{1}{2}$ ductis in $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{4}$: at √ȝ 6 in se ducta fiunt 6 : & √c 6 in se ducta fiunt 6.

Numeri irrationales in Geometricis demonstrationibus usum habent necessarium. Probant enim præcisè ea, quæ rationales numeri probare non possunt. Effectu autem magni momenti existente, causam quoque eius non parui esse momenti, necesse est. Hinc igitur Geomeurici numeri verè appellari possunt. Cofsici rationales ad irrationales ita se habent, ut numeri integri ad fractos.

Non omnis numerus, qui ger t signum √ȝ irrationalis est, ut √ȝ 25 numerus rationalis est. Radix enim illius est 5. At √ȝ 30 numerus est irrationalis, quia radix illius vera nulla est. Nullus enim numerus dari potest, siue integer sit, siue integer cum fracto, qui in se quadratè multiplicatus producit 30.

Cuiuis rectilineæ figuræ (nedū rectangulo parallelogramō) Geometricè dari posse quadratum prorsus æquale, nemo nisi ἀγεωμέτρητος nescit: nec tamen semper necesse est, duobus numeris uno in alterū ducto, quadratum numerum produci. Itaque fit sæpe, ut licet quadrata superficies numero exprimatur, quæ multiplicationis producto respondeat: tamen latus eius numero exprimi non possit, cum non omnes numeri sint quadrati. Hinc igitur numeri Geometrici existunt.

Surdi sunt duplices alij simpliciter, alij secundum quid. Surdi simpliciter sunt irrationales: surdi secundum quid surdesolidi ap-

pellari solent, quorum radix quidem quadrata nulla est; suæ vero speciei radix, id est, surdesolida habetur: collocaturque in numeris progressionis imparibus, ut quinto, septimo, undecimo, decimo tertio, & sic deinceps: & nominatur literis alphabeti A, B, C, D, E, F, &c. In compositione sic: bsursolidi, cursolidi, dursolidi, &c.

Rursus surdorum alij appellantur uniuersales compositi, alij uniuersales diminuti.

Vniuersales compositi sunt, cum signũ puncto distinctum ab ipsis particulis ambas numeri particulas afficit, ut √ ʒ. 12 ✠ √ ʒ 6, quæ sic enunciatur. Radix uniuersalis 12 plus radicis quadratæ 6. Ad totum enim numerũm compositum refertur.

Vniuersales compositi una cum suis diminutis faciunt radices binomiorum, ut √ ʒ 49 -- √ ꝗ 27.

Mediales numeri sunt quædam radices surdæ numerorum rationalium, ijque radices vel quadratæ, vel cubicæ vel zensizensicæ, & sic deinceps. Neque enim necesse est constare signis tantum simplicibus, cum & composita admittant sic. √ ʒʒ. √ ʒ ꝗ √ ʒʒʒ, &c.

Radicum compositarum à quibusdam alia ligata, alia distincta vocatur. Ligata nihil aliud est, quam summa vel residuum uniuersalium compositorum, ut √ ʒ. 9 ✠ √ ʒ 4. significat 5 unitates, summam videlicet ex 3 radice zensica numeri 9, & ex 2 radice zensica numeri 4 collectam. Sic √ ʒ 49 -- √ ꝗ 27 significat 4. Nam ex √ ʒ 49, hoc est, ex 7 ablata est √ ꝗ 27, id est, 3, atque ita pretium eius 4.

Distincta nihil aliud est, quàm cum particulæ seorsim accipiuntur, non autem earum summa, ut √ ʒ 16 ✠ √ ʒ 9 radix distincta est, cum particulæ 4 & 3 per se sumuntur, ligata cum coniunctim, ut 7. Ligata in se ducta facit 49. Ex distincta fient numeri 16 & 9, qui simul efficiunt 25 duntaxat.

Reductio Cossicorum est multiplex: una Cossicorum ad absolutos: altera absolutorum ad irrationales: tertia Cossicorum ad irrationales: quarta irrationalium ad rationales: quinta irrationalium ad idem signum: sexta diuersi generis ad unam æstimationem, quæ æquatio dicitur: septima Cossicorum integrorum & fractorũ ad minimos terminos: octaua Cossicorum non simplicium ad simplices: nona æquationum in minutijs ad terminos integros.

1. *Reductio* Cossicorum ad absolutos est valoris illorum in absolutis numeris indicatio: ut 5 ʒ ✠ 6 ℞ valent 32: idque ex hypothesi, posita nimirum radice 2 partium. Tum enim 5 ʒ faciunt 20: & 6 ℞

& 6 ℞ faciunt 12. Posita vero radice una 3 partium numerus prior Cossicus valet 63. Tum enim 5 ʓ faciunt 45, & 6 ℞ valent 18, quæ collecta constituunt 63.

2 *Reductio* absolutorum ad irrationales, id est, verorū numerorū in surdos fit signum irrationale addendo: ut ex 6 fit √ʓ 6. Hoc tum fit cum surdis multiplicandi aut diuidendi causa committuntur: alioqui ubi veris numeris locus est, ineptè surdos ingesseris.

3. *Cossici* fiunt irrationales, cum ipsis signum aliquod irrationalium præfigitur: ut ex 4 ℞ fit √ʓ 4 ℞, radix censica quatuor radicum. Sensus autem est, ut sumatur radix zensica 4 radicum, quæ mille modis variari potest pro varietate valoris unius radicis, potestq́; aliquando esse rationalis, & aliquando idque ut plurimum irrationalis: ut √ʓ 20 ℞ est numerus rationalis æquivalens 10. Nam si 1 ℞ est 5, erunt 20 ℞ N. 100, cuius √ʓ est 10.

4. *Reductio* irrationalium ad rationales est hæc. Extrahe radices quas signa radicalia signāt esse extrahendas, & residuum multiplica per 60, productumque diuide per duplum radicis inuentæ, ita tamen ut post diuisionem subtrahas quotum à residuo manente: ut latus trigoni æquilateri circulo inscribendi facit præcisè √ʓ 10800 Hunc numerum irrationalem sic resoluo in rationalem.

1. Radix quadrata de 10800 est 103, & remanent 191.
2. Multiplicatio residui per 60. sic.

$$\begin{array}{r} 191 \\ 60 \\ \hline 11460 \end{array}$$

& sic proueniunt minuta 11460.

3. Diuisio producti per duplum radicis 103, nempe 206.

$$\frac{11460}{206}\Big(55.$$

Quotus minuta $55\frac{130}{206}$.

4. Quoti 55 quadratum est 3025, quod subtractum à 130 minutis (siue residuo) id est, 7800 secundis relinquunt 4775 secunda, quæ diuisa per 206 diuisorem priorem generant 23 sec. Itaque hunc numerum 103. 55. 23. inuenies à Ptolomæo positum pro chorda arcus 120 gr. cap. 9 lib. 1. & in tabula arcuū & chordarū. Est autem arcus graduum 120, tertia pars circumferentiæ circuli. Stifelius lib. 2. cap. 31. Nec tamen ista reductio tam accurata, tamq́;

propinqua est vero numero, ut propius ad præcisionem nemo possit accedere, cum utrunque fieri non possit: sed tanta, quanta instituto operi sufficiat.

5. *Reductio irrationalium* ad idem signum fit hoc modo. Vtrunque absolutorum multiplica decussatim ea, quam signa transuersa indicant multiplicatione: tum duo signa simul iunge, & emerget signum commune, utrinque producto præponendum: ut √ℭ 4 ℞ & √ℨ 8 ℞ fiet √ℨℭ 16 ℨ, & √ℨℭ 512 ℭ, ad idem signum reductio, hoc modo.

4 ℞ ╳ 8 ℞
√ℭ ═ √ℨ

√ℨℭ 16 ℨ √ℨℭ 512 ℭ.

Hic 4 multiplicantur zensice, & fiunt 16: 8 cubice, & fiunt 512. Vocatur hæc reductio etiam reductio ad æquales denominatores.

Quod probatur sumto binario in radicem. Erit enim √ℭ 4 ℞ 2. & √ℨ 8 ℞ erit 4. Iam √ℨℭ 16 ℨ valent √ℭ 4 ℞, scilicet 2. Nam 16 ℨ valent 64, quorum radix zensicubica est 2. Similiter √ℨℭ 512 ℭ æqualis est √ℨ 8 ℞. Nam 512 ℭ faciunt 4096, quorum radix zensicubica est 4. Reductio vero ad minimos terminos erit √ℨℭ 16: & √ℨℭ 512 ℞.

6. *Aequatio* est duarum quantitatum diuersi nominis & valoris ad unam æstimationem reductio: ut diuersæ quantitates sunt radix & census: harum æquatio est, si dicamus 1 ℨ æquari 4 ℞. Quod si enim 1 ℨ sit 16: necessario quoq; 4 radices æquabuntur 16: atque adeo una radix erit 4. Dato enim uno æqualium dabitur alterum: & si duo quadrata fuerint inter se æqualia: latera etiam eorum inter se æqualia erunt: & vice versa, si latera quadratorum fuerint æqualia, quadrata quoque ipsa inter se æqualia erunt. Sic si 1 ℨ æqualis fuerit 8 ℞ ✠ 48, necesse est, ut utriusque 1 ℞ sit æqualis huic numero 12. Nam radix quadrata de 8 ℞ ✠ 48 est 12, per extractionem radicum. Quadratum vero utriusque seorsim sumtum est 144. Inuenitur autem exæquatio omnibus circumstantijs in quæstione positis examinatis & expeditis: quandoq; & alijs theorematis Arithmeticis & Geometricis, imprimis per regulam Trium, ponendo in loco tertio quæstionem æquationis: in medio numerum ex processu quæstionis, in fine unitatem. V. G. Quæritur numerus

à quo

à quo tertia & quarta pars ablatæ, relinquunt 10. Pro numero incognito pono 1 ℞. scilicet fingo 1 ℞ æqualem esse ipsi numero, quem quæro. Tunc sic rationem ineo. Tertia pars 1 ℞ est $\frac{1}{3}$ ℞: quarta item eiusdem est $\frac{1}{4}$ ℞: hæ partes ab 1 ℞ ablatæ relinquunt $\frac{5}{12}$ ℞. Iam sic stant numeri ad regulam $\frac{5}{12}$ d. 10, quantum dant 1. Multiplico 1 ℞ per 10, fiunt 10 ℞: diuide 10 ℞ per $\frac{5}{12}$ ℞: exeunt 24 numerus quæsitus. Hic $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 inter se sunt æqualia: & 1 ℞ æqualis 24.

7. *Reductio* numerorum & characterum Cossicorum integrorũ ad minimos terminos fit aut abbreuiatis aut intactis characteribus Cossicis, aut utroque modo simul. Abbreuiatio characterum cossicorum fit per subtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus maiorum characterum. Nam si reliquis numeris proprij characteres tribuantur, peracta erit abbreuiatio, quod ad characteres attinet. Abbreuiatio numerorum in tactis characteribus fit ut in vulgari Arithmetica. V. G. Si 3 ȼ æquentur 12 ʒ --- 9 ℞, ex sola numerorum reductione erit 1 ȼ æqualis 4 ʒ --- 3 ℞. Diuiduntur enim singuli æquationis numeri per numerum maximæ denominationis, nempe per 3. Ex sola vero signorum reductione erunt 3 ʒ æquales 12 ℞ --- 9: scilicet auferendo ℞ à ȼ manent 3 ʒ: deinde auferendo à ʒ signum ℞: & demum idem auferendo à seipso, manent 12 ℞ --- 9. Tandẽ si utranque reductionem fecero, erit 1 ʒ æqualis 4 ℞ --- 3. Sic 24 ȼ & 36 ß reducti utroque modo ad minima valent 2 & 3 ʒ. Communis enim utrique numero diuisor est 12: & character minoris ipsum characterem minorem tollit & abolet: de maiore vero tantundem aufert relicto residuo.

Ratio huius reductionis est, quia utrobiq; manet eadem proportio, tam in reducente, quam in reducto.

Comprobatio. 24 ȼ habent 192: at 36 ß habent 1152. Huius ad illa proportio sextupla. Sic 3 ʒ, id est, 12 proportio est sextupla ad 2. Eodem modo 15 ℞ & 40 ʒ --- 10 ℞ reducta ad minima valent 3 & 8 ℞ --- 2. adhibita communi mensura maxima, quinario.

Eodem modo fit reductio fractionum cossicarum ad minimos terminos: ut hæc fractio $\frac{8\ ʒ}{2\ ȼ}$ quod ad characteres attinet ad hanc

reducitur 8/2 ßß : quòd ad numeros spectat ad hunc 4 ʒ/1 ʒ ᶜ. Hæc autem 18 ʒ --- 9 ℞ / 6 ℞ ✠ ßß reducitur ad istam, quod ad numeros & characteres attinet 6 ℞ --- 3 / 2 ✠ 1 ℞. In primo exemplo minutiæ propositæ numeri diuiduntur per communem mensuram maximam: in altero singuli characteres per eundem exponentem deprimuntur: ita ut eadem prorsus sit distantia inter characteres, ad quos facta est reductio, quæ priorum characterum propositorum.

Officio medialium quotuis medij proportionales inter duos numeros inueniri possunt: idque hoc exemplo apparet. Inter 5 & 20 statuendus sit unus numerus medius.

1. Assumendum signum radicale hoc √ʒ quod inter quadratum & unitatem cadat unus medius proportionalis, in qualibet progresione Geometrica, quæ ab 1 incipit: si duo medij, accipiendum est signum radicale √ᶜ: si tres, signum √ʒʒ: si quatuor signum √ß. si quinque signum √ʒᶜ, & sic deinceps.

2. Diuiso maiore numero 20 per minorem 5 constituenda progresio hæc trium terminorum 1. 4. 16, per quotum 4 progrediens.

3. Cuilibet termino præfigendum signum √ʒ, hoc modo √ʒ 1. √ʒ 4. √ʒ 16: eruntque hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices quadratæ numerorum 1. 4. 16. continuè proportionalium. Si quærantur duo, tres, quatuor, quinque medij, illud signum adhibendum, quod seruit numero mediorum.

4. Extractis radicibus quadratis sic stabit progresio 1. 2. 4. Si duo quæruntur medij extrahatur radix cubica: si tres, radix censi censica, & sic deinceps.

8. Reductio cossicorum compositorum & diminutorum ad simplices, quæ æquationi interuenit, cum una denominatio plus quàm semel reperitur, perficitur regulis quatuor.

Prima. Cum in æquatione una denominatio sæpius ponitur: tum unum commune alteri homonymo vel additur, vel ab altero subtrahitur. Additur, ubi signum est --: subtrahitur ubi signū est ✠.

SUBTRACTIO, ut 6 ℞ ✠ 4 æquantur 46, Hic una denominatio nempe numeri bis ponitur, cum signo pluris. Reducendi sunt igitur duo numeri ad unum, quod fit uno communi, nempe quaternario ab.

nario ab altero homonymo subtracto, & relinquentur 6 ℞ æquales 42: radices scilicet æquales uni numero. Fit autem subtractio, quia signum ✠ subtrahit. Sic 48 ✠ 8 ℞ æquantur 144. Facta operatione ut antea, id est, subtracto uno communi, nempe 48 ab homonymo 144, relinquuntur 8 ℞ æquales 96. Δοκιμασία. *Nam 8 ℞ (posita una radice pro 12) multiplicata per 12: 8 ℞ erunt 96, quibus si 48 addideris, fiunt 144, æqualia numero absoluto. Ab utroq; si 48 abieceris, remanebunt æqualia.*

ADDITIO, ut 2 ℞ --- 5 æquantur 24. Hic ut antea una denominatio bis ponitur, cum signo minoris. Reducendi sunt igitur duo numeri ad unum, quod fit uno communi, nempe quinario alteri homonymo addito, & fient 2 ℞ æquata 29. Fit autem additio, quia signum -- addit.

Sic 12 ℞ --- 32 & 64 sunt æqualia. Reducta ad unum numerum, uno communi, nempe 32, homonymo alteri addito facient 12 ℞ æquales 96.

Δοκιμασία. *1 ℞ valeat 8. Ergo 12 ℞ valent 96: à quibus si remoueantur 32, relinquuntur 64. Aequalia sunt igitur 12 ℞ --- 32 & 64. Et si rursus 32 à 12 ℞ detracta adieceris ad 64 æquabuntur 12 ℞ & 96. Nam & 12 ℞ valent 96.*

SECVNDA. Quod si fiat æquatio inter duos compositos dissimilium signorum, reductio fiet tum additione tum subtractione, tum transpositione: cuius duæ sunt regulæ. Signum ✠ transpositum transit in ---: contra signum --- transpositum transit in ✠. Sic autem reductio instituenda est, ut numerus denominatus, si unicus fuerit, separatim ac per se reliquis æquationis particulis æquetur: aut si forte plures denominati fuerint, qui maximæ erit denominationis solus reliquis æquationis partibus æquiparetur. Vt sint 6 ℞ ✠ 6 æquata 12 ℞ ✠ 30: hic reiectis primo 6 ℞ ab altero homonymo, supererũt 6 & 6 ℞ --- 30, postea translato numero diminuto ad priorem partem æquationis, & ad 6 addito æquabuntur 36 & 6 ℞.

Sin

Sin vero signa utraq; sunt signa minoris, tantum subtractione utimur ut 6. ℞ --- 10 æquatas 10 ℞ --- 34 reduces primùm diminuto prioris partis translato ad posteriorem & facta subtractione. Aequabuntur enim 6 ℞ & 10 ℞ --- 24. Postea de altera parte fractionis reiectis 6 ℞. Supererunt enim 4 ℞ --- 24: & rursus transpositione facta numeri diminuti, æqualia erunt 4 ℞ & 24.

Quod si miscella fuerit in utraq; parte, miscenda erũt secundum artem prædicta omnia, ut in exemplo sequenti apparet. 1 ℨ ✠ 6 --- 1 ℞ æquatur 4 ℞ ✠ 2. Hic partes sic transponendæ sunt, ut 1 ℨ stet solitariè, æqualis reliquo æquationis, hoc modo.

1 ℨ ✠ 6 ℜ --- 1 ℞ æquatur 4 ℞ ✠ 2 ℜ.

Subtractio 2 ℜ.

Residuum 1 ℨ ✠ 4 ℜ --- 1 ℞ æquatur 4 ℞.

Additio --- 1 ℞.

Productum 1 ℨ ✠ 4 ℜ æquatur 5 ℞.

Transpositio 4 ℜ.

1 ℨ æquatur 5 ℞ --- 4 ℜ.

TERTIA. Quod si æquatio reducta plures habeat characteres cosicos quàm unum, eosq; diversos, ac magnitudine discrepantes, in tali casu numerus maioris Cossici characteris ipso charactere abiecto dividit reliquum sibi æquatum: ut si 2 ℨ ✠ 22 ℞ æquatur 160. transpositione 22 ℞ æquantur 2 ℨ & 160 --- 22 ℞: atq; ita 2 ℨ deposito charactere Cossico dividunt reliquum, id est, 2 dividunt 160 --- 22 ℞: & remanent 80 --- 11 ℞.

QVARTA specialis est hæc. Quod si in una parte æquationis sit signum ---: in altera vero parte nullà quantitas quantitatibus prioris partis similis, tunc adde quantitatem signo --- notatam ad alteram partem æquationis: ut 40 --- 8 ℞ æquantur 6 ℨ: addo igitur 8 ℞ ad alteram partem æquationis, & emergent 6 ℨ ✠ 8 ℞ æquati 40.

Nititur haec reductio aequationum duabus regulis. Si aequalia addideris vel subtraxeris aequalibus, quae fiunt, erunt aequalia. Et, si aequalia diuiseris per aequalia: quae fiunt, erunt aequalia. Radices vero aut solae aequantur numero: aut quadrata sola radicibus & numeros: aut cubi soli, si incidant, quadratis, radicibus & numero: pro quaestionis proposito & deductione.

9. Reductio Cossicorum fractorum ad terminos integros fit sic. Multiplica numeratorem unius per denominatorem alterius decussatim: procreati ex hac multiplicatione assumantur pro integris, denominatoribus exclusis: ut $\frac{3\text{℞} + 12}{5}$ *aequata 12 ℞ -- 66, ut reducantur ad integros terminos collocantur in hunc modum, integro fracto per suppositam unitatem.*

$$\frac{3\text{℞} + 12}{5} \times \frac{12\text{℞} - 66}{1}$$

Facta multiplicatione per crucem 3 ℞ + 12 aequabuntur 60 ℞ -- 330.

Hoc modo ubi minutias aequatas redaxeris ad integra, rursus per reductionem prius traditam, integra si composita fuerint, vel diminuta reduc ad simplices terminos, ut in praecedenti exemplo reiectis ab utraque parte 3 ℞ aequabuntur 12 & 57 ℞ -- 330: rursus termino diminuto translato ad priorem partem aequationis 342 aequabuntur 57 ℞.

5. Huius progressionis termini singuli per numerum minorem 5 multiplicandi sunt: unde sic stabit progressio. 5. 10. 20: inuentusque erit medius terminus proportionalis 10. per 18. septimi. Nam 5. 10. 20, eandem habent proportiones quas 1. 2. 4. cum hos numeros idem numerus 5. multiplicans illos produxerit. Quod autem hi termini sunt continue proportionales probari per diuisionem potest. Sic inter 6 & 18 quinque medij proportionales sunt 6. √ʒℭ 139968. √ℭ 648. √ʒ 108. √ℭ 1944. √ʒℭ 11337408. 18.

Ee Eandem

Eandem inuentionem lib. 3. alia methodo tradidimus: eamq; cum apodixibus.

Duo mediales in proportione nominata reperiuntur sic. Duos proportionis indices quadra: ambo quadrata duc in propositum quempiam numerum, sed non quadratum: utriq; producto præpone signum quadratorum. V. G. √ʒ 175, & √ʒ 63 sunt duo mediales in proportione $\frac{5}{3}$ superbipartiente tertias, quæ dabatur. Quadro enim 5 & 3, fiunt 25 & 9. Horum utrunq; duco in numerum quemlibet non quadratum, v. g. in 7, proueniunt 175 & 63: quorum utriq; prapono signum quadratorum.

Radicum alia commensurabilis, alia incommensurabilis. Commensurabilis est, quæ respicit aliam radicem, per quam si diuidatur, quotus fit rationalis proportionemq; cum illa habet, quam quotus ad unitatem: vel si quotus est minutia, quam numerator minutiæ ad denominatorem, per prop. 2. lib. 9. ut commensurabiles sunt √ʒ 12 & √ʒ 3. Illa enim per hanc diuisa fit 4, hoc est, 2: habebuntq; proportionem duplam, nimirum 2 ad 1. Sic √ʒ 18 & √ʒ 8 commensurabiles sunt, proportionemq; habent, quam 3 ad 2, nimirum sesquialteram, quod maiore diuisa per minorem quotus fit √ʒ $2\frac{1}{4}$ vel √ʒ $\frac{9}{4}$, hoc est, $\frac{3}{2}$. Diuisa autem √ʒ 8 per √ʒ 18 fit quotus √ʒ $\frac{4}{9}$, hoc est, $\frac{2}{3}$: & sic proportionem habent quam 2 ad 3.

Hanc & communicantem uocant, quod proportionem quidem certam habet ad alteram, sed propositi characteris radicem non obtinet: & per communem mensuram maximam rationalis reddi potest, hoc modo. $\frac{8}{18} \mid \frac{4}{9} \mid \frac{2}{3}$.

Incommensurabilis est, quæ respicit alteram radicem, per quam si diuidatur, quotus fit numerus surdus, vel irrationalis, proportionemq; habet irrationalem: ut √ʒ 48 & √ʒ 8, quia ex diuisione oritur quotus √ʒ 6, irrationalis, cum 6 non habeat radicem quadratam: habent tamen proportionem quam √ʒ 6 ad 1. Sic √ c͡ʒ 32, & √ c͡ʒ 18 incommensurabiles sunt. Nam ex diuisione gignitur quotus √

tus $\sqrt[3]{1\frac{7}{9}}$, *vel* $\frac{16}{9}$, *qui licet habeat radicem quadratam* $\frac{4}{3}$, *cubicam tamen non habet. Erit autem earum proportio eadem quæ* $\sqrt[3]{16}$ *ad* $\sqrt[3]{9}$: *vel* $\sqrt[3]{\frac{16}{9}}$ *ad* 1.

Proportio igitur radicum surdarum inter se ea est, quam radices commensurabiles, & incommensurabiles indicant.

Vter duorum numerorum compositorum maior sit, sic cognoscitur. Quæratur radix quadrata amborum, & cuius radix propinqua est numerus maior, illum maiorem pronuncia: ut numerus $4 + \sqrt{7}$ est maior, quam $20 - \sqrt{180}$. Nam in priore radix propinqua numeri 7 est $2\frac{2}{3}$, quæ cum 4 facit $6\frac{2}{3}$: in posteriore radix propinqua numeri 180 est $13\frac{11}{27}$, quæ subtracta ex 20 relinquit $6\frac{16}{27}$. Constat autem $\frac{2}{3}$ esse numerum maiorem, quàm $\frac{16}{27}$.

AXIOMATA.

1. Si ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint: tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: septimus vero cubus simul & quadratus: & quinq; intermittentes omnes. Propos. 8. lib. 9. Vt in numeris qui sequuntur.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.
ʒ c ʒ ʒc

6561. 19683. 59049. 177147. 531441.
ʒ c ʒ ʒc

Hic in locis imparibus sunt quadrati: in cæteris cubi: vel quadrati & cubi simul.

2. Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: qui vero post unitatem sit quadratus: & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post unitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt: ut in numeris qui sequuntur.

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096.
Q. Q. Q. Q. Q. Q. Q.

Hic proximus unitati est quadratus, & sic reliqui omnes.

1. 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144.

c. c. c. c. c. c. c.

Hic proximus unitati est cubus, & sic reliqui omnes. Eadem est ratio quadratorum & cuborum simul. prop. 9. lib. 9.

3. In qualibet progressione Geometrica ab unitate incipiente unitas ponitur loco puncti, & radix loco lineæ, & tertius terminus loco superficiei: & reliquorum singuli sunt solidi.

4. In omni progressione ab unitate incipiente quartus terminus est cubus. Est enim productum ex radice ter posita, atque inter se multiplicata: ut 2. 2. 2. inter se ducti faciũt 8: quintus terminus est censicensus. Est enim productum ex radice quater posita; sextus terminus est surdesolidus. Est enim productum ex radice quinquies posita: & similem ob causam septimus zensicubus: octauus bsurdesolidus: nonus zensicencensicus: & sic deinceps.

5. Radix multiplicans quadratum, cubum producit: multiplicans biquadratum gignit relatum primum: multiplicans relatum primum producit quadratocubum, & sic deinceps.

ADDITIO NVMERORVM COSSICORVM INTEGRORVM.

πρότασις. Numeros Cossicos plures, uno numero Cossico complecti.

Quatuordecim sunt casus. Numerus enim Cossicus aut est simplex, aut compositus: & rursus aut eiusdem, aut diuersi characteris: & rursus aut rationalis, aut irrationalis. isq́; vel abundans, vel diminutus, vel mixtus: & rursus vel integer, vel fractus.

ἐκθ. primi casus. *Sint duo numeri Cossici simplices eiusdem characteris 4 ȝ & 9 ȝ.* Δ. Opor-

Δ. Oportet *hos duos uno complecti.*

Κατασκ. *Quando ijdem fuerint characteres Cosßici datorum numerorum, addes illos, ut in vulgari Arithmetica, & summæ appones eundem characterem Coßicum, hoc modo, 4 & 9 sunt 13; quibus addo characterem ʒ.*

1. Additio numerorũ Cossicorũ simpliciũ eiusdem characteris.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 4 ʒ & 9 ʒ facere 13 ʒ.*

Ἀπόδειξις est eadem quæ vulgarium numerorum. Dati enim numeri sunt partes: quæsitum est totum.

Ἐκθ. secundi casus. *Sint duo numeri Coßici diuersorum characterum, 6 ℞ & 8 ℭ.*

2. Additio numerorũ Cossicorũ simpliciũ diuersorũ characterum.

Δ. Oportet *hos duos uno numero complecti.*

Κατασκ. *Si diuersi fuerint datorum numerorum characteres Cosßici additio peragitur mediante hoc signo ✛, fitq́ numerus compositus, hoc modo. 6 ℞ ✛ 8 ℭ.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 6 ℞ additas 8 ℭ facere 6 ℞ ✛ 8 ℭ. Sic 8 ℞ addita ad 20 ℜ constituunt 20 ℜ ✛ 8 ℞.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ vulgarium numerorum diuersarum specierum. Similia enim similibus addenda sunt.

Ἐκθ. tertij casus. *Sint duo numeri compositi, ijq́ ambo abundantes eiusdem characteris, 12 ℞ ✛ 18 : & 7 ℞ ✛ 13.*

3. Additio numerorũ compositorum, eorumque amborum abundantium.

Δ. Oportet *hos duos numeros uno complecti.*

Κατ. *Eadem signa additionis ponunt idem signum in aggregato sine exceptione, hoc modo.*

12 ℞	✛	18
7 ℞	✛	13.
19 ℞	✛	31.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 12 ℞ ✛ 18, additas 7 ℞ ✛ 13, constituere 19 ℞ ✛ 31.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ vulgarium numerorum earundem specierum.

Ἐκθ. quarti casus. *Sint duo numeri compositi diminuti 4 ʒ --- 8 ℜ & 10 ʒ --- 10 ℜ.*

4. Additio numerorũ composi-

torum denominatorum.

Δ. Oportet *hos duos numeros uno complecti.*

Κατ. *Addendi sunt numeri eiusdem appellationis, hoc modo.*

4 ℨ --- 8 ℜ.
10 ℨ --- 10 ℜ.
14 ℨ --- 18 ℜ.

Repetitio τῦ διορ. *Dico* 14 ℨ --- 18 ℜ *constituere* 14 ℨ --- 18 ℜ.

Ἀπόδειξις est eadem, quæ numerorum vulgarium, specierum earundem. Similia enim numerant similia.

5. Additio numerorū compositorum diminutorū perturbati ordinis.

ἐκθ. quinti casus. *Sint duo numeri compositi, ijq́; diminuti perturbati ordinis* 6 ℨ --- 8 ℞ : & 12 ℞ --- 3 ℨ.

Δ. Oportet *hos duos numeros uno numero complecti.*

Κατασκ. *Fac subtractionem alternam numerorum homogeneorum: & residua summam constituunt cum signo abundantiæ, hoc modo.*

6 ℨ --- 8 ℞.
12 ℞ --- 3 ℨ.
3 ℨ ✠ 4 ℞.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico* 6 ℨ --- 8 ℞ *additos* 12 ℞ --- 3 ℨ *constituere* 3 ℨ ✠ 4 ℞.

Ἀπόδειξις est eadem, quæ præcedentis casus.

6. Additio numerorū abundantium perturbati ordinis.

ἐκθ. sexti casus. *Sint duo numeri compositi, ijq́; abundantes perturbati ordinis* 6 ℨ ✠ 8 ℞ & 12 ℞ ✠ 3 ℨ.

Δ. Oportet *hos duos numeros uno complecti.*

Κατ. *Fac alternam additionem numerorum homogeneorum: & summam subscribe cum signo abundantiæ, hoc modo.*

6 ℨ ✠ 8 ℞.
12 ℞ ✠ 3 ℨ.
9 ℨ ✠ 20 ℞.

Repetitio τῦ διορ. *Dico* 6 ℨ ✠ 8 ℞ *additos* 12 ℞ ✠ 3 ℨ *facere* 9 ℨ ✠ 20 ℞.

Ἀπόδειξις est eadem, quæ antea: ut & sequentium casuum.

ἐκθ.

ἐκθ. septimi casus. *Sint duo numeri mixti ex plurib. iisq. diuersis numeris simplicibus 24 ℭ ✠ 16 ʒ --- 40 ℞ : & 20 ʒ --- 40 ℞ ✠ 50 ℔.*

7. Additio numerorũ mixtorum rationaliũ eiusdem characteris.

Δ. Oportet *hos duos numeros uno complecti.*

Κατ. *ὁμώνυμοι redigantur in unam rectam lineam, uno consistente sub altero: reliquum additionis perage, ut prius, in hunc modum.*

24 ℭ ✠ 16 ʒ --- 40 ℞.
0 ℭ ✠ 20 ʒ --- 40 ℞ ✠ 50.
24 ℭ --- 36 ʒ --- 80 ℞ ✠ 50.

ἐκθ. octaui casus. *Sint duo numeri mixti diuersorum signorũ siue directè, siue praepostere: directè 16 ℞ ✠ 5: & 6 ℞ --- 10. Et praepostere 5 ʒ --- 3 ℞, & 12 ℞ ✠ 4 ʒ.*

8. Additio numerorũ mixtorum rationaliu diuersorũ characterum.

Δ. Oportet *hos duos numeros uno numero complecti.*

Κατ. *Numeri eiusdem characteris, quorum uterq., vel alteruter antecedit signum, additur: qui sequitur vel sequuntur à se inuicem subtrahuntur, minor à maiore: & retinetur signum maioris numeri, signum sequentis, hoc modo.*

	ALIVD.
16 ℞ ✠ 5.	5 ʒ ✕ 3 ℞.
6 ℞ --- 10.	12 ℞ ✠ 4 ʒ.
Summa 22 ℞ --- 5.	9 ʒ ✠ 9 ℞.

Repetitio τῆς δεῖξ. *Dico 16 ℞ ✠ 5, additas 6 ℞ --- 10 constituere 22 ℞ --- 5. Sic additas 12 ℞ ✠ 4 ʒ facere 9 ʒ ✠ 9 ℞.*

Δοκιμασία primi exempli. Explicata radice in absolutos numeros, erunt 16 ℞ ✠ 5 idem quod 37: & 6 ℞ --- 10, idem quod 2: hæc addita, efficiunt 39. Tantum sunt & 22 ℞ --- 5. Hic 2 pro una radice ponuntur.

Similis est probatio cæterorum exemplorum.

ἐκθ. noni casus. *Sint duæ pluresue radices irrationales (mediales appellatæ) eæq. æquales eiusdem speciei √ 3, & √ 3. vel √ ʒ 6, & √ ʒ 6, vel √ ℭ 6. √ ℭ 6, √ ℭ 6,*

9. Additio radicum irrationalium æqualium eiusdem speciei.

Δ. Oportet *datas binas & ternas radices addere.*

Κατ.

Κατασκ. *Si duæ ſunt radices quadratæ, numeri propoſiti ducuntur in quadratum binarij: ſi tres, in quadratum ternarij, & ſic deinceps. Si duæ ſunt radices cubicæ, numeri propoſiti ducuntur in cubum binarij: ſi tres in cubum ternarij, & ſic deinceps, hoc modo. Radix quadrata primi exempli eſt 3, quæ bis poſita, ducitur in 4. quadratum binarij, & fiunt 12. Radix quadrata ſecundi exempli eſt 6, quæ bis poſita, ſimiliter ducitur in 4, quadratum binarij, & fiunt 24. Radix cubica tertij exempli eſt 6, quæ ter poſita ducitur in cubū ternarij 27: & fiunt 162. Bis poſita, ducentur in 8 cubum binarij, & fient 48.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico √3, additam √3, facere √12: & √ʒ 6 additam √ʒ 6, conſtituere 24. Et √ȼ 6 ter poſitam facere 162: bis poſitam 48.*

10. Additio radicū irrationalium inæqualium ſimpliciū comunicantium.

ἐκθ. decimi caſus. *Sint duæ pluresúe radices irrationales, eæq; inæquales & communicantes. √5 & √80.*

Δ. Oportet *has duas radices quadratas uno numero complecti.*

Κατασκ. *1. Diuide duas radices per communem menſuram, eamq; maximam, & fient duo quoti. 2. Quadratorum radices quadratas inueſtiga, & adde inuentas, unde fiet ſumma. 3. Summam multiplica in ſe: unde fiet productum. 4. Productum rurſus duc in communem menſuram, hoc modo.*

1. Communis menſura datarum radicum eſt 5: per quam diuiſis 5 & 80, fiunt quoti 1 & 16.

2. Radices quadratæ quotorum ſunt 1 & 4: quæ additæ faciunt 5.

3. Summa ducta in ſe conſtituit 25: quæ multiplicata per communem menſuram faciunt 125.

Repetitio τῦ διορ. *Dico √125 eſſe ſummam duarum radicum, √5 & √80.*

Ἀπόδειξις 1 Syll. ſententia additionis. Datis partibus dabitur totum per additionem. Duæ partes lateris quadrati ſunt 1 & 4. Ergo per additionem totum eſt 5.

2 Syll. ſententia, Dato latere dabitur illius quadratum per multiplicatio-

tiplicationem lateris in se. Ergo quadratum 5 est 25.

3 Syll. sententia. Dato quadrato in minimis terminis dabitur quadratum in maioribus, ijsque datis terminis per comunem mensuram antea adhibitam. Quadratū 125 datur in minimis terminis. Ergo idem quadratum dabitur in maioribus terminis, multiplicando per 5, quæ fuit comunis mensura maxima, *quod fecisse oportuit.*

Similiter ex √ ʒ 8 ad √ ʒ 18 fit √ ʒ 50.

Δοκιμασία. Explicata radice in absolutos numeros erunt √ ʒ 8 idem quod 16, cuius radix quadrata est 4. Igitur radix zensica 8 ℞ facit 4. Sic √ ʒ 18 facit 6. Nam 18 ℞ faciunt 36, cuius √ ʒ facit 6. Itaque √ ʒ 18 ℞ ✝ √ ʒ 8 ℞, faciunt 10. Tantum etiam facit √ ʒ 50 ℞. Nam 50 ℞ faciunt 100, cuius √ ʒ facit 10.

Ἐκθ. undecimi casus. *Sint duæ pluresue radices irrationales simplices, eæq; inæquales & siue commensurabiles, siue incommensurabiles.* 11. Additio radicum irrationalium simplicium siue comunicātium, siue non communicantium, siue eiusdem, siue diuersæ speciei.

Sint primo commensurabiles √ 80, & √ 245.

Δ. Oportet *duas radices √ 80, & √ 245 uno complecti.*

Κατ. *1. Adde duas radices datas, quæ & pro quadratis earum habentur (Nam semper productum irrationalium est numerus producentis) unde summa exibit.*

2. Multiplica easdem radices in se, & ex producto extrahe radicem.

3. Radicem duplica, & duplum adde summæ supra inuentæ.

4. Summa additionis est summa datarum duarum radicum, hoc modo.

1. Additio duarum radicum	*245*
	80
Summa	*325.*
2. Multiplicatio ℞	*245*
	80
Productum	*19600.*

quorum radix quadrata 140.

3. *Duplum radicis* 280
4. *Additio dupli & summa* 325

Summa --- 605.

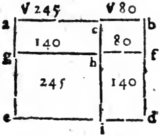
Repetitio τῆς διορ. *Dico* √ 605 *esse summam duarum radicum* √ 80 & √ 245.

Ἀπόδειξις pendet ex 4 prop. lib. 2. hoc modo.

1 Syll. sententia additionis. Datis partibus dabitur totum per additionem. Partes lineæ *ab* duæ *ac* & *cb* dantur, *ac* √ 245, *cb* √ 80. Ergo per additionem tota linea *ab* est √ 325.

2 Syll. sententia multiplicationis. Datis lateribus rectanguli dabitur illius area per multiplicationem. Rectanguli *ab* dantur duo latera, *ac* √ 245, *cb* √ 80. Ergo area rectanguli *ab* per multiplicationem est 19600.

3 Syll. sententia. Data area dabitur illius radix per extractionem radicis. Data area rectanguli *ab* est 19600. Ergo per extractionem radicis quadratæ radix est 140.



4 Syll. porisma quartæ proposit. Supplementa longitudine & latitudine sunt æqualia, non tantum ipsæ area. Hic sunt duo supplementa *ab* & *bd*. Ergo utriusque supplementi æqualia sunt & latera & area.

5 Syll. sententia. Vnum æqualium duplicatum facit aream utriusque æqualium. Duo supplementa *ab*, & *bd* sunt inter se æqualia, utrunque enim est 140. Ergo 140 duplicata, quæ faciunt 280, sunt area utriusque supplementi. Hæc est ratio duplationis.

6 Syll. sententia additionis. Datis partibus dabitur totum per additionem. Datæ partes quadrati ex *ab* sunt duo quadrata, & duo supplementa. Ergo per additionem datur totum, hoc modo.

Summa

Summa duorum quadratorum 3 √ 5
Summa duorum supplement. 2 8 0

Summa totius quadrati. 6 0 5.

7 Syll. sententia. Dato quadrato non vero dabitur radix illius surda, notata signo √. 605 est quadratus numerus non verus. Ergo radix illius surda est, quæ sic notatur √ 605.

συμπέρ. Datæ igitur duæ radices quadratæ irrationales, eæque inæquales & commensurabiles in unam summam collectæ sunt, *quod fecisse oportuit.*

Simili modo adduntur radices cubicæ, zensicensicæ, surdesolidæ, & cæteræ, quod uno exemplo √ ꝗ breuiter ostendemus.

Sint addendæ radices cubicæ communicantes √ ꝗ 2, & √ ꝗ 54.

1. Additio √ ꝗ. 54
2

Summa 56

2. Multiplicatio ---- 54
Quadratum binarij --- 4

Productum --- 216, quorum √ ꝗ rationalis 6.

3. Triplum radicis cubicæ 18
4. Additio tripli & summæ 56

Summa ---- 74

5. Quadratum √ ꝗ ---- 54
54

216
270

6. Multiplicatio in √ ꝗ 2 - 2916
2

5832, quorum R: ꝗ 18
3

7. Triplum ---- 54
8. Summa additionis tripli & summæ ---- 74

Quæsitum ---- 128.

Dico √ 128 esse summam datarum √ ꝗ 2 & 54.

Ἀπόδειξις pendet ex analysi cuborum, eaque siue Arithmetica, siue Geometrica, quam supra in extractione radicis cubicæ proposuimus.

Sint deinde incommensurabiles radices, eæque siue eiusdem, siue diuersæ speciei, v. g. √ȝ 6 & √ȝ 11: sic √ȝ 3 & √ c 10.

Δ. Oportet *datas radices uno numero complecti.*

Κατασ. *Radices incommensurabiles non possunt in unam summam colligi: ita ut ex illis una radix simplex conficiatur: sed addendæ sunt per interpositionem signi plus in forma binomij: hoc modo. √ȝ 6 ✠ √ȝ 11, quod est binomium. Sic √ȝ 3 ✠ √c, quod similiter est binomium.*

Ἀπόδειξις pendet ex illo axiomate. Similia numerant similia.

Sic √ 12 ℞ ad 8 ȝ addita facit summam ℞ 12 cum 8 ȝ, quæ proferenda sic. 8 ȝ ✠ ℞ 12. Nam 8 est maior quantitas quam ℞ 12. Maior autem quantitas in legenda summa prius proferenda est.

12. Additio radicũ irrationalium compositarum earumque cõmunicantium.

Ἔκθ. duodecimi casus. *Sint duo pluresúe numeri irrationales compositi communicantes, ijq́, varij generis, quos uno numero complecti oportet.*

Κατασκ. *Additio compositorum eodem fit modo quo simplicium, addendo & obseruando duas regulas, quarum prima est hæc. Eadem signa idem signum ponunt. Secunda est hæc. Diuersa signa mutant speciem operationis. Et in additione ponatur signum maioris numeri: ut in exemplis apparet.*

Primum exemplum.	*Secundum exemplum.*
7 ✠ √ 27	7 — √ 27
5 ✠ √ 3	5 — √ 3
12 ✠ √ 48.	12. — √ 48.

Tertium exemplum.	*Quartum exemplum.*
7 — √ 27	7 ✠ √ 27
5 ✠ √ 3	5 — √ 3
12 — √ 12.	12 ✠ √ 12.

Quintum

Quintum exemplum.	*Sextum exemplum.*
8 — √ʒ 50	*√ʒ 50 ✠ 6*
√ʒ 242 — 12.	*24 — √ʒ 242.*
√ʒ 72 — 4.	*30 — √ʒ 72.*

In primo exemplo numeri absoluti sunt 7 & 5, qui additi faciunt 12: √ʒ 27 & √ʒ 3 reductis irrationalibus ad aequales denominatores constituunt 50, hoc modo, de quo supra dictum in decimo casu.

1. Communis mensura datarum radicum est 3. Per quae diuisis 27 & 3, fiunt quoti 1 & 9.

2. Radices quadratae quotorum sunt 1 & 3: quae additae faciunt 4.

3. Summa ducta in se constituit 16, quae multiplicata per communem mensuram faciunt 48. Caetera exempla ex septimo & decimo casu intelligi possunt.

Ἐκθ. decimi tertij casus. *Sint duo pluresue numeri irrationales compositi, ijque incommensurabiles varij generis, quos uno numero complecti oportet.* 13. Additio radicum irrationalium compositarū, earumque non communicantium.

Κατ. *Si compositi irrationales fuerint incommensurabiles, non possunt aliter in unam summam colligi, quàm additione per interpositionem signi ✠, ut apparet in exemplis.*

I.	II.
7 ✠ √3	*√20 — √6*
√19 ✠ √5	*√13 — 2*
7 ✠ √3, √19, ✠ √5.	*√20 — √6 ✠ √13 — 2.*

III.	IIII.	V.
6 ✠ √2	*6 — √2*	*6 — √13*
√18 ✠ √10	*√18 — √10*	*√13 ✠ √7.*
6 ✠ √32 ✠ √10.	*6 ✠ 8 — √10.*	*6 ✠ √7.*

VI.	VII.
$7 + \sqrt{3}$	$\sqrt{20} - \sqrt{6}$
$\sqrt{19} + \sqrt{5}$	$\sqrt{13} - 2$
$7 + \sqrt{19} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.	$\sqrt{20} - \sqrt{6} + \sqrt{13} - 2$.

Ἀπόδειξις pendet ex sententia 13. Similia numerant similia.

ADDITIO NVMERORVM COSSICORVM FRACTORVM.

Πρότασις. Numeros Cossicos fractos uno numero Cossico complecti.

Duo sunt casus. Numerus enim Cossicus fractus aut est rationalis, aut irrationalis.

14. Additio numerorũ Cossicorũ fractorũ.

Ἔκθ. primi casus. *Sint duæ minutiæ Cossicæ rationales* $\frac{3}{4}$ ℞ *&* $\frac{2}{3}$ ʒ.

Δ. Oportet *datas minutias uno numero complecti.*

Κατασκ. *Operationes fractionum Cossicarum non differunt ab ijs, quas de minutijs vulgaribus tradidimus, habita tamen semper ratione signorum + & —, nec non characterum Cossicorum, quorum operationes in superioribus præceptis continentur: ut in exemplo præcedenti* $\frac{3}{4}$ ℞ *&* $\frac{2}{3}$ √ *faciũt* $\frac{8 ʒ + 9 ℞}{12}$, *reductione tali facta* $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ | $\frac{9}{12}$ $\frac{8}{12}$.

Veritatem operationis explorabis resoluta radice per binarium. Habebunt enim minutiæ addendæ $\frac{25}{6}$ *vel* $4\frac{1}{6}$. *Tantum valet & aggregatum* 8 ʒ + 9 ℞. *Nam* 8 ʒ *valent* 32 *: &* 9 ℞ *valent* 18, *quæ coniũcta efficiunt* $\frac{50}{12}$, *supposito scilicet absoluto denominatore, & facta diuisione* $4\frac{1}{6}$ *ut prius.*

ALIVD.

$\frac{2}{3}$ ℞ $\frac{3}{4}$ ℞ *additæ faciunt* $\frac{17}{12}$ ℞. *Præmissa enim reductio ad eandem denominationem efficit* $\frac{8}{12}$ ℞ *&* $\frac{9}{12}$ ℞, *quæ coniuncta, quod ijdem sunt characteres utriusque, producunt* $\frac{17}{12}$ ℞.

ALIVD.

ALIVD.

⅔ ℞ 4ʒ/3ℭ *additæ faciūt* 9ʒʒ/6ℭ *&* 8ʒ/6 *quæ additæ producunt* (9ʒʒ + 8ʒ)/6ℭ.

ἐκθ. ſecundi caſus. *Sint duæ minutiæ Coſsicæ irrationales* √ʒ 4/7, *&* √ʒ 9/7. *Sic* √ʒ 16/49 *&* √ʒ 4/9.

Δ. Oportet *datas duas minutias addere.*

Κατασκ. *Additio fit in hunc modum. Si denominator eſt idem, adde numeratores, eo modo, quo ſupra dictum in undecimo caſu: & ſummæ communi denominatorem ſuppone: ut in ſuperiori exemplo, ubi idē utriuſq; fractionis denominator eſt, adde 4 & 9, & fiunt 25.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico* √ʒ 25/7, *id eſt,* 5/7 *eſſe ſummam duarum radicum* √ʒ 4/7 *&* √ʒ 9/7.

Quod ſi denominatores ſunt diuerſi, reduc numeros ad eandem denominationem, ut in ſuperiori exemplo.

Reductio.	*Termini reducti.*	*Additio reductorum.*
16/49 ✕ 4/9	144/441 — 196/441	676/441 | 26/21 ſiue 1 5/21.

Quando numeratores ſunt incommenſurabiles, additio eorum fit per interpoſitionem ſigni + *: ut* √ʒ 7/8 *&* √ʒ 5/8 *additæ faciunt* √ʒ 7/8 + √ʒ 5/8.

SVBTRACTIO COSSICORVM INTEGRORVM.

πρότασις. Numerorum Coſſicorum integrorum minorem à maiore ſubtrahere.

Totidem ſunt caſus ſubtractionis, quot additionis.

ἐκθ. primi caſus. *Sint duo numeri Coſsici ſimplices eiuſdem characteris* 5 ℞ *&* 2 ℞.

Δ. Oportet *minorem à maiori ſubtrahere.*

Κατ. *Si iidem fuerint characteres Coſsici datorum numerorum, alterum ex altero ſubduces prorſus ut in vulgari Arithmetica, hoc modo.* 2 ℞ *ſubtractis à* 5 ℞ *ſuperſunt* 3 ℞.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico reſiduum ex ſubtractione* 2 ℞ *à* 5 ℞ *eſſe* 3 ℞.

Ἀπόδειξις

'Ἀπόδειξις est eadem, quæ vulgarium numerorum. Sicut enim 2 fl. reiectis ex 5, relinquuntur 3 fl. Sic de 5 ℞ si detrahantur 2 ℞, supererunt 3 ℞. Sic de 5 ȝ si 2 ȝ abijciantur, 3 ȝ remanebunt.

ἔκθ. secundi casus. *Sint duo numeri simplices diuersorum characterum, 5 ℞ & 40 ß.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατ. *Si diuersi fuerint datorum numerorum characteres Coßici subtractio peragitur interpositione signi ---, quod subductionē indicam, hoc modo, 5 ℞ --- 40 ß.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico residuū ex subtractione 5 ℞ à 40 ß. esse 5 ℞ --- 40.*

'Ἀπόδειξις est eadem quæ numerorum diuersarum specierum. Similia enim numerant similia. Sic si de 100 detraxeris 5 ℞, restabunt 100 --- 5 ℞.

Sic plures alios deducturus à quocunque, remoue à subtrahendo omnes ordine sola notatione signi --- ut à 36 ȝȝ ablaturus 10 ℭ & 7 ȝ & 12 ℞ & 24 aureos. absolues subtractionem separatis à proposito numero singulis signo subtractionis, & relinquentur 36 ȝȝ --- 10 ℭ --- 7 ȝ --- 12 ℞ --- 24 aureis.

ἔκθ. tertij casus. *Sint duo numeri compositi, ijq; ambo abundantes, eiusdem characteris 19 ℞ + 31, & 7 ℞ + 13.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατασκ. *Eadem signa abundantia ponunt idem signum in residuo subtractionis, tunc cum iusto & legitimo ordine numeri dispositi fuerint, id est, cum is, à quo subtractio fieri debet, non fuerit subtrahendo minor, hoc modo.*

19 ℞ + 31		*14 ℭ + 12 ȝ*
7 ℞ + 13	*Sic in alio exemplo.*	*9 ℭ + 4 ȝ*
12 ℞ + 18.		*5 ℭ + 8 ȝ.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico residuum ex subtractione 7 ℞ + 13 à 19 ℞ + 31 esse 12 ℞ + 18: & in altero exemplo residuum ex subtractione 9 ℭ + 4 ȝ à 14 ℭ + 12 ȝ esse 5 ℭ + 8 ȝ.*

'Ἀπόδειξις.

Ἀπόδειξις est eadem quæ vulgarium numerorum, ut & primi & secundi casuum.

ἔκθ. quarti casus. *Sint duo numeri compositi, ὑφ᾽ ambo diminuti eiusdem characteris 24 ℥ --- 13 ℞ & 14 ℥ --- 8 ℞.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατ. *Eadem signa ponunt idem signum, & homogenei ab homogeneis subtrahuntur, ut in priori casu, hoc modo.*

	24 ℥ --- 13 ℞		*6 ℞ --- 8*
	14 ℥ --- 8 ℞	*Et in alio*	*2 ℞ --- 4*
Residuũ	*10 ℥ --- 5 ℞.*	*exemplo.*	*Residuum 4 ℞ --- 4*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico residuum ex subtractione 14 ℥ --- 8 ℞ à 24 ℥ --- 13 ℞ esse 10 ℥ --- 5 ℞. Et in altero exemplo 4 ℞ --- 4.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ præcedentium casuum.

ἔκθ. quinti casus. *Sint duo numeri compositi, ὑφ᾽ ambo diminuti, perturbati ordinis, 12 ℞ --- 3 ℥ & 5 ℥ --- 6 ℞.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατ. *Fac additionem alternam numerorum homogeneorum, & producta residuum constituunt cum signo eodem, hoc modo.*

12 ℞ ✕ 3 ℥	*Et in alio*	*8 ℥ ✕ 5 ℞*
5 ℥ — 6 ℞	*exemplo.*	*7 ℞ — 2 ℥*
18 ℞ --- 8 ℥.		*10 ℥ --- 12 ℞.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 18 ℞ --- 8 ℥ esse residuum ex subtractione 5 ℥ --- 6 ℞ à 12 ℞ --- 3 ℥.*

Δοκιμασία. Si enim constituas 1 ℞ partium 2, & resoluas Cossicos numeros in absolutos, detrahasque singulis eos, qui decedunt ob signum --- constabit is, à quo facienda subtractio est 12 partibus, quibus æquantur 12 ℞ --- 3 ℥: subtrahendus 8 partibus, quibus æquantur 5 ℥ --- 6 ℞. Residuum 4 partibus, quibus æquantur 18 ℞ --- 8 ℥.

Quod si numeri præposterè ponuntur, hoc est, subtrahendus maior sit, subtrahendus erit præpostero ordine superior ab inferiori: sed numero reliquo dandum signum contrarium: ita ut ex signo +

 fiat

fiat —, & ex --- fiat ✠: ut exempla, quæ sequuntur, indicant.

Primum.	*Secundum.*
14 ℞ --- 8	12 ℞ --- 3 ℨ
9 ℞ --- 12	8 ℨ --- 15 ℞
Residuum 5 ℞ ✠ 4.	*Residuum* 27 ℞ --- 11 ℨ.
Tertium.	*Quartum.*
12 ℞ --- 15	8 ℨ --- 2 ℞
16 ℞ --- 84	12 ℞ --- 3 ℨ
69 —— 4 ℞	11 ℨ --- 14 ℞.

Examen operationis primi exempli est hoc. Resoluta 1 R in duas partes, valent 14 R -- 8, partes 20: at 9 R --- 12 partes 6: his deductis à 20 supersunt 14. Tantundem valent 5 R ✠ 4 residui.

In secundo exemplo commutatur operatio, & pro subtractione fit additio. Sed numeri præposterè ponuntur, ideo aggregatum radicum præponitur: subiungitur aggregatum quadratorum intercedente signo ---. In subtractione enim cum characteres diversi sunt ṡ ponit s.

Examen. Resolutis enim binario radicibus & proportione quadratis valet superior numerus 12: inferior seu subtrahendus 2. Hic si reijciatur à superiore, relinquuntur 10, quibus æquantur 27 R --- 11 ℨ.

In tertio exemplo numeri utriq; & radicum & absoluti præposterè ponuntur. Totus igitur superior à toto inferiore detrahitur: & præmittitur residuum absolutorum: subiungitur residuum radicum, quod signa additionis, quæ præire radices signo expresso destitutæ intelliguntur, signum --- eidem attribuunt: id vero alium ante se semper numerum requirit.

Examen est hoc. Resolutis radicibus in absolutos numeros per 9, habet superior numerus 93: inferior 60. Facta subtractione remanent 33: quibus exæquantur 69 --- 4 ℞.

Exemplum quartum est simile tertio: cumq; & numeri radicum præposterè ponantur, & ad ὁμωνύμους numeros sint signa diversa, fit

pro

pro subtractione additio: & censicorum aggregato primo posito annectitur aggregatum radicum per signum ---.

Ἀποδείξις adhibitâ superior numerus habet 28, inferior 12: peracta subtractione supersunt 16. Tantum valent & 1 1 ȝ — 14 ℞.

ἐκθ. sexti casus. *Sint duo numeri diminuti 8 --- 2: & 10 --- 5.*

Δ. Oportet *10 --- 5, subtrahere ab 8 --- 2, hoc est, 5 à 6.*

Κατ. *eadem est, quæ quarti & quinti casuum de præpostera subtractione, hoc modo. 2 ex 5 manent 3: quibus contrarium signum* ✠ *tribuo. Nam numerus -- 2 intelligitur superare hunc numerũ --- 5 tribus unitatibus: deinde subtraho* ✠ *10 à* ✠ *8 maiorem numerum ex minore, quod fieri non potest verè, sed præposterè ficto numero, qui notatus sit signo minus, hoc modo --- 2 ut totus numerus sit --- 2,* ✠ *3. Sed quia non rectè ad initium numeri præfigitur hoc signũ ---, ita statuendus erit relictus, 3 --- 2. At subtractis 12 ex 8 relinquuntur 0 --- 4, numerus minor nihilo.*

Σχόλιον.

Nihilum est medium inter numeros veros & fictos, siue minores nihilo. Vt enim numeri crescunt ab unitate, ita decrescunt à nihilo sic. — 7 | — 6 | — 5 | — 4 | — 3 | — 2 | — 1 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7. Estque numerus fictus similis radicibus numerorum, qui eas non habent: ut √ ȝ 20. Vt igitur radices surdæ: ita & numeri nihilo minores magnum usum in Algebra obtinent.

ἐκθ. septimi casus. *Sint duo numeri compositi, ijq; abundantes perturbati ordinis 10 ȝ* ✠ *12 ℞ & 6 ℞* ✠ *5 ȝ.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subducere.*

Κατ. *Fac subtractionem alternam numerorum homogeneorum à se inuicem, censicorum à censicis, radicum à radicibus, hoc modo.*

10 ȝ ✠ *12 ℞*
6 ℞ ✠ *5 ȝ*

Residuum 5 ȝ —— 6 ℞.

Ἀποδείξις. Si enim 1 ℞ statuatur 2 partium, & Cossici numeri resoluuntur in absolutos, erit is, à quo debet fieri subtractio partium 64: subtrahendus earundem partium 32. Residuum partium itidem 32: quibus æquantur 5 ȝ ✠ 6 ℞.

'Ἐκθ. octaui casus. *Sint duo numeri mixti, siue ordine siue præposterè: ac primum quidem ordine 24 ℞ — 5. & 16 ℞ ✠ 5.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατασκ. *In subtractione subtrahuntur primum numeri eorundem signorum, adduntur vero simul numeri diuersorum signorum & summæ apponitur signum superioris, à quo fieri debebat subtractio, quodcunque illud fuerit, siue ✠ siue —, hoc modo.*

24 ℞ — 5
16 ℞ ✠ 5
8 ℞ — 10.

In hoc exemplo numeri radicum, quas idem præcedit, signum additionis imaginare, secundum 12 definitionem, non variant operationem, sed aufertur minor à maiore. Absoluti diuersis præfixis signis additione componuntur.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 8 ℞ — 10 esse residuum ex subtractione 18 ℞ ✠ 5 à 24 ℞ — 5.*

Δοκιμασία. Vsitata analysi radicibus mutatis 24 ℞ — 5 erunt 43: & 16 ✠ 5, erunt 37: subtractione peracta relinquentur 6: quibus æquantur 8 ℞ — 10.

Sint vero numeri mixti præposterè, 19 ʒ ✠ 6 ℞ & 12 ʒ — 10 ℞.

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατασκ. *eadem quæ in priori exemplo, ad hunc modum.*

19 ʒ ✠ 6 ℞
12 ʒ — 10 ℞
Residuum 7 ʒ ✠ 16 ℞.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 7 ʒ ✠ 16 ℞ esse residuum ex subtractione 12 ʒ — 10 ℞ à 19 ʒ ✠ 6 ℞.*

Δοκιμασία eadem quæ prioris exempli. Nam 19 ʒ ✠ 6 ℞ sunt 88: & 12 ʒ — 10 R sunt 28: hæc si detrahantur à prioribus restant 60. Tantus est valor quoque 7 ʒ ✠ 16 R.

EXEMPLA NONI casus, in quibus fit subtractio mixtorum Cossico-

Coßicorum diuerſorum characterum, & perturbato ordine.

	I.	II.	III.
	84 -- 12 ℞	12 ʒ + 3 ℞	12 ℞ + 0
	8 ℞ -- 14.	15 ℞ -- 5 ʒ	7 ℞ -- 4
Reſiduum	98 -- 20 ℞	17 ʒ -- 12 ℞	5 ℞ + 4.

In primo exemplo utrobiq; numeris Coßicis homogeneis diuerſa ſigna adiacent. Prioribus enim ſignum pluris intellectũ aſciſcitur. Adiunguntur igitur abſoluti abſolutis: radices radicibus.

In ſecundo diuerſa ſunt ſigna zenſicorum. Adduntur hæc ergo & aggregatum priori loco collocatur propter ſignum additionis præcedens numerum ſuperiorem. Radicum numeri præpoſterè collocati ſunt. Subtrahitur ergo ſuperior ab inferiore, & ſignum additionis mutatur in ſignum ſubtractionis.

In tertio exemplo ſubtrahendus numerus bimembris eſt ſeu diminutus. Efficiatur itaq; bimembris, & ſuperior appoſita ei per ſinũ additionis 0, ut ſupra oſtenſum eſt, fitq; ex præſcripto regulæ ſubtractio, ut eleganter docet C. Peucerus.

ἐκθ. decimi caſus. *Sint duæ radices irrationales æquales, √ ʒ 12 & √ ʒ 12.*

Δ. Oportet *√ ʒ 12 à √ ʒ 12 æquali ſubtrahere.*

Κατασκ. *Quando radix aliqua à radice æquali ſubtrahitur, nihil relinquitur.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico reſiduum ex ſubtractione æqualiũ radicum eſſe √ ʒ 0.*

ἐκθ. undecimi caſus. *Sint duæ radices irrationales inæquales, eæq; incommenſurabiles, √ ʒ 3 & √ ʒ 10.*

Δ. Oportet *radicem minorem à maiore ſubtrahere.*

Κατ. *Si radices fuerint inæquales, eæq; incommenſurabiles non poterit fieri ſubtractio niſi per ſignum ſubtractorum, hoc modo.*

√ȝ 10.		*√ꝯ 50*
√ȝ 3	*Et,*	*√ꝯ 20*
Residuum √ȝ 10 --- √ȝ 3.		*√ꝯ 50 --- √ꝯ 20.*

ὑθ. duodecimi casus. *Sint duæ radices irrationales, eæq; commensurabiles, √ȝ 8 & √ȝ 50.*

Δ. Oportet *radicem minorem à maiori subtrahere.*

Κατ. *1. Amborum proportionem inquire per communem mensuram, ut in 10 casu additionis, & radicem quadratam (vel cubicam) extrahe ex terminis minimis, numerum proportionis minorem aufer à maiori: ex reliquo fac numeratorem, subscripto minore proportionis numero pro denominatore. Vtrunq; (numeratorem & denominatorem,) quadra (vel cubica, prout indicabit signũ mediale:) per quadratum (vel cubum) numeratoris multiplica numerum absolutum minoris particulæ: productum diuide per quadratum (vel cubum) denominatoris: numero indicanti præscribe signum mediale: & fiet numerus subtractionis, hoc modo.*

1. Proportio maioris ad minorem est ut 5 ad 2. Nam diuisis 8 & 50 per communem mensuram 2 emergunt $\frac{25}{4}$, quarum √ȝ est $\frac{5}{2}$.

2. Differentia numerorum fractionis est 3. Nam 2 à 5 detractis manent 3, numerator, cui subscribo 2, numerum minoris proportionis, & fit $\frac{3}{2}$.

3. Quadro $\frac{3}{2}$ fiunt $\frac{9}{4}$.

4. Per numeratorem 9 multiplico numerum minoris medialis 8, proueniunt 72.

5. Productum diuide per denominatorem 4, & exeunt 18.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico √ȝ 18 esse numerum subtractionis √ȝ 8 à √ȝ 50. Eodem modo √ȝ 18 est numerus ex subtractione √ȝ 2 à √ȝ 32 reliquus: & √ꝯ 27 à √ꝯ 216 sublata manet eadem √ꝯ 27.*

Δοκιμασία subtractionis est ipsa additio: ut in penultimo exemplo si addideris √ȝ 2 ad √ȝ 18 redibit √ȝ 32: si vero abstuleris √ȝ 18

à √ȝ

à √ȝ 32 reliqua fiet √ȝ 2. Et in ultimo si addideris √ ȼ 27 ad seipsam proueniet √ ȼ 216.

ἐκθ. decimi tertij casus. *Sint numeri irrationales compositi, ῥῃζ communicantes, ac primum quidem rationalis cum irrationali 16 + √ȝ 54 & 9 + √ȝ 6.*

Δ. Oportet *minorem à maiori subtrahere.*

Κατ. *Subtractio mixta est ex absolutorum & medialium praeceptionibus, hoc modo.*

$$\begin{array}{r} 16 + \sqrt{ȝ}\,54 \\ 9 + \sqrt{ȝ}\,6 \\ \hline 7 + \sqrt{ȝ}\,24. \end{array}$$

Hic 9 subtracta à 16 relinquunt 7: √ȝ 6 subtracta à √ȝ 54 relinquit 24. Sunt enim radices commensurabiles, quarum proportio per communem mensuram 6, est ut 9 ad 1. quarum √ȝ est $\frac{3}{1}$. Differentia numerorum fractionis est 2. Nam 1 à 3 subtracto manent 2, cui subscribo, & fit fractio $\frac{2}{1}$, quadro 2, fiunt 4 (denominatorem hic nihil attinet quadrare) quae multiplico per 6, numerum minoris medialis, fiunt 24 (nec vero diuido, cũ unum nihil mutet) quibus praepono signum mediale, fit √ȝ 24.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico 7 + √ȝ 24 esse numerum ex subtractione 9 + √ȝ 6 à 16 + √ȝ 54 reliquum.*

σχόλιον.

In supputatione ubi numerator vel denominator continet 1, ibi nec quadratur, nec diuiditur.

ALIA EXEMPLA.

I.	II.	III.
√ȝ 50 + 8	√ȝ 72 --- 3	27 --- √ȝ 72
√ȝ 72 --- 3	9 --- √ȝ 50.	√ȝ 50 + 8
11 ----- √ȝ 2.	√ȝ 242. --- 12.	19 --- √ȝ 242.

In primo exemplo, cum in duabus primis particulis signa sunt eadem, & numerus maior à minore sit subducendus: superior ab inferiore

feriore subtrahitur, signumq; + in — conuertitur. In duobus postremis, ubi signa sunt dissimilis, retinetur signum numeri superioris: idq; ex lege signorum pluris & minoris.

Secundo sit irrationalis *compositus cum irrationali* √ȝ 605 + √ȝ 147 & √ȝ 180 + √ȝ 48.

Δ. Oportet *irrationalem compositum minorem à maiore irrationali subtrahere.*

Κατ. *Subtractio fit ex praeceptis medialium tantum, hoc modo. Proportio maioris ad minorem in primo numero 605 ad 180 est, quae* $\frac{11}{6}$. *Iam 6 subtracta ab 11 relinquunt 5, cui subscriptus minor numerus proportionis facit* $\frac{5}{6}$: *quorum quadrata sunt* $\frac{25}{36}$. *Nunc 25 ducta in 180 faciunt 4500, quae diuisa per 36 constituunt 125. Similiter proportio maioris ad minorẽ in altero numero 147 ad 48, est quae* $\frac{49}{16}$, *quorum radix quadrata est* $\frac{7}{4}$. *Differentia numerorum fractionis est 3. Nam 4 à 7 subtracto manent 3: cui subscribo 4 & fit* $\frac{3}{4}$: *quadro 3 & 4, fiunt* $\frac{9}{16}$: *rursus per numeratorem 9 multiplico numerum minoris medialis 48, proueniunt 432: productum diuido per denominatorem 16, exeunt 27.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico* √ȝ 125 + √ȝ 27 *esse residuum ex subtractione* √ȝ 180 + √ȝ 48 *ex* √ȝ 605 + √ȝ 147.

Δοκιμασία subtractionis est additio, hoc modo.

√ȝ 125 + √ȝ 27
√ȝ 180 + √ȝ 48
√ȝ 605 + √ȝ 147.

ALIA EXEMPLA.

	√c 1000 + √ȝȝ 3125.	√ȝȝ 2381 — √c 1
	√c 216 — √ȝȝ 405	√ȝȝ 256 — √c 27
Residuum	√c 64. — √ȝȝ 80.	√ȝȝ 81 — √c 8.

In secundo exemplo subtrahenda est √c *à* √c 1, *maior à minori: ob id signum — conuertitur in* +.

ἐκθ. decimi quarti casus. *Sint duo numeri irrationales, compositi, ijq; incommensurabiles, ut 8 —* √ȝ 12 & √ȝ 72 — 4.

Δ. Opor-

Δ. Oportet *numerum minorem à maiori ſubtrahere.*

Κατ. *Si numeri fuerint inæquales, eaq́ incommenſurabiles, non poterit fieri ſubtractio, niſi per ſignum ſubtractionis, hoc modo.*

√ʒ 72 --- 4.

8 ---- √ʒ 12

Reſiduum √ʒ 72 --- 4 --- 8 ✠ √ʒ 12.

Δοκιμασία eſt contraria additio. Nam ſi addantur inter ſe √ʒ 72. √ʒ 12 & -- 4 -- 8 erit reſiduum √ʒ 72 ✠ √ʒ 12 -- 12. Quod ſi addantur per propoſitionẽ 4 lib. 2. Euc. facient √ʒ(84 ✠ √ʒ 3456) atque adeo reſiduum totum erit √ʒ (84 ✠ √ʒ 3456) --- 12.

Eadem ratio ſubtractionis & reductione ad numeros rationales probari poteſt. Nam v. g. √ʒ 49 --- 3 ſubtracta ab 8 ✠ √ʒ 9. relinquit 8 ✠ √ʒ 9 -- √ʒ 49 ✠ 3. Sunt autem √ʒ 49 -- 3 nihil aliud quàm 4 : & 8 ✠ √ʒ 9 nihil aliud quàm 11. Iam 4 ſubtracta ab 11 relinquunt 7 : quibus æquipollent 8 ✠ √ʒ 9 — √ʒ 49 ✠ 3. Nam 8 ✠ √ʒ 9 ſunt 11 : & — √ʒ 49, id eſt, minus 7 ſunt 4, ✠ 3 ſunt 7.

SVBTRACTIO NVMERORVM COSSICORVM FRACTORVM.

πρότασις. Numerum Coſſicum fractum minorem à maiore ſubtrahere.

Duo ſunt caſus. Numerus enim Coſſicus fractus aut eſt rationalis, aut irrationalis.

ἐκθ. primi caſus. *Sint duæ minutiæ Coſſicæ* $\frac{2}{3}$ ℞ *&* $\frac{3}{5}$ ℞. *Rurſus* $\frac{2}{3}$ ℞ *&* $\frac{17}{12}$ ℞.

Δ. Oportet *minutiam minorem à maiori ſubtrahere.*

Κατασκ. *Si denominator eſt idem, numerator unus ab altero ſubtrahitur, & reſiduo communis denominator ſupponitur. Quando autem denominatores ſunt diuerſi, fit reductio ad eundem denominatorem : tandem unus ab altero ſubtrahitur, & reliquo numero idem denominator communis ſubſcribitur, ut in vulgari Arithmetica, hoc modo.*

In primo exemplo $\frac{2}{5}$ ℞ *subtracta à* $\frac{3}{5}$ ℞ *relinquunt* $\frac{1}{5}$ ℞.

Alterius exempli minutia ad eandem denominationem reductæ constituunt $\frac{51}{36}$ ℞ & $\frac{24}{36}$ ℞. *Facta numeratorum subtractione relinquuntur* $\frac{27}{36}$ ℞: *quæ ut in vulgari logistica ad minimos terminos communi mensura, quæ nouenarius est, reducta, constant* $\frac{3}{4}$.

Δοκιμασία est additio duarum partium nempe $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$ Summa enim est æqualis toti, nimirum $\frac{17}{12}$. Vel reductio ad valorem sic, $\frac{5}{3}$ ℞ faciunt $2\frac{5}{6}$: à quibus ablata $1\frac{1}{3}$ relinquunt $\frac{3}{2}$, id est, $1\frac{1}{2}$.

Ἐκθ. secundi casus. *Sint duæ minutiæ Cossicæ irrationales exempli gratia* $1\frac{1}{3}$: $\frac{17}{12}$ *faciunt* $2\frac{5}{6}$ *eiusdem denominationis* √ʓ $\frac{4}{7}$ & ℞ ʓ $\frac{9}{7}$. *Rursus diuersæ denominationis* √ʓ $\frac{16}{49}$ & √ʓ $\frac{4}{9}$.

Κανών. *Eadem est ratio operationis, quæ antea, hoc modo.*

In primo exemplo √ʓ $\frac{4}{7}$ *subtracta à* √ʓ $\frac{9}{7}$ *relinquit* $\frac{1}{7}$. *Nam radix censica 4 est 2: & radix censica 9 est 3. Iam 2 à 3 subtracta relinquunt subscripto communi denominatore* √ $\frac{1}{7}$ *vel* $\frac{1}{7}$.

In posteriore exemplo reductio primum fit sic: $\frac{144}{441}$. $\frac{196}{441}$. *deinde subtractio sic.*

	Radix.	Resid.
√ 196	14	2
√ 144	12	441
√ 441.	21	

In numeris compositis exemplum.

$$\frac{\sqrt{ʓ}\,50 + \sqrt{ȼ}\,24}{5} \quad \& \quad \frac{\sqrt{ȼ}\,24 + \sqrt{ʓ}\,8.}{2}$$

Reductio $\frac{\sqrt{ʓ}\,200 + \sqrt{ȼ}\,192.}{10.}$ $\frac{\sqrt{ȼ}\,3000\ \sqrt{ʓ}\,200.}{10.}$

Residuum √ȼ $\frac{648}{10}$. *Nam* √ʓ 200 *ex* √ʓ 200 *nihil relinquit.*

ALIVD. √ʓ $\frac{4}{5}$ & √ʓ $\frac{49}{5}$ *Residuum* |7 2 / 5| $\frac{5}{5}$ *siue* √ʓ $\frac{25}{5}$.

Quod si numeratores sunt incommensurabiles, subtractio fit per interiectionem signi --- : *ut* √ʓ $\frac{5}{8}$ *demta ex* √ʓ $\frac{7}{8}$, *reliquam facit* √ʓ $\frac{7}{8}$ --- √ʓ $\frac{5}{8}$.

MVLTI-

MVLTIPLICATIO COSSICORVM INTEGRORVM.

πρότασις. Numerum Cossicum in alterum multiplicare.

Plures sunt casus. Aut enim Cossicus est integer, aut fractus. Rursus alius rationalis, alius irrationalis: isq; vel simplex, vel compositus: & iterum vel æqualis: vel inæqualis. Et rursus Cossicus ducitur vel in absolutum, vel in cossicum.

ἔκθ. primi casus. *Sint duo numeri 6 & 2 ℞.*

Δ. Oportet *hos duos numeros inter se multiplicare.*

Κατ. *Numerum absolutum cum denominato multiplica, & adde characterem cossicum sic. Bis 6 sunt 12 ℞. Sic 8 ducta in 3 ʒ faciunt 24 ʒ.*

Eadem est ratio compositorum: ut 4 in 7 ℞ ✠ 5 gignunt 28 ℞ ✠ 20. Eadem 4 in 7 ʒ ✠ 5 ℞ gignunt 28 ʒ ✠ 20 ℞. Absolutus enim non mutat vel characteres Cossicos, vel signa prosthaphaeretica: neq; adijcit illis quidquam aut derogat.

Δοκιμασία posterioris exempli. Radice binario resoluta 7 ʒ ✠ 5 ℞ habebunt 38. (Nam 7 ʒ faciunt 28, & 5 ℞ faciunt 10.) Quibus quaternario multiplicatis fiunt 152. His vero æquantur 28 ʒ ✠ 20 ℞.

ἔκθ. secnndi casus. *Sint duo numeri Cossici inter se æquales 2 ℞ & 2 ℞.*

Δ. Oportet *hos duos numeros inter se multiplicare.*

Κατασκ. *Numeros absolutos inter se multiplica: characteres verò adde pro exponentium iunctorum ratione, sic. Bis 2 ℞ sunt 4, & addito signo duplicato, 4 ʒ. Et 2 ʒ in se ducti faciunt 4 ʒʒ: item 2 ꝗ in se quadratè faciunt 4 ʒ ꝗ. Hanc multiplicationem quadratam vocant. Pro multiplicatione cubica duc numerum in se cubicè: characterem verò triplica: ut 2 ℞ in se cubicè, faciunt 8 ꝗ: item 2 ʒ cubicè faciunt 8 ʒ ꝗ. Pro biquadrata, multiplica absolutum biquadratè: characterem quadruplica: ut 2 ℞ in se biquadratè faciunt 16 ʒʒ: & 2 ʒ biquadratè faciunt 16 ʒʒʒ.*

σχόλιον.

Aggregatum exponentium (quorum tabula habetur supra) demonstrat characterem emergentem: ut ex ductu ℞ in ℞ oritur ʒ, quod unitas unitati adiecta binarium ponit, indicem ʒ. Ex ℞ in ʒ ductu, ȼ: & ʒ in ȼ, ß: ex ʒ in ʒ, ʒʒ propagatur.

ALIVD.

6 ʒ + 4 ℞ — 10
6 ʒ + 4 ℞ — 10

---

36 ʒʒ + 24 ȼ — 60 ʒ
+ 24 ȼ + 16 ʒ — 40 ℞
— 60 ʒ — 40 ℞ + 100

Productum 36 ʒʒ + 48 ȼ — 104 ʒ — 80 ℞ + 100.

Δοκιμασία. Resolutis Cossicis producti in absolutos, 36 ʒʒ valent 576: & 48 ȼ valent 384: quæ propter signum additionis prioribus adiecta, gignunt 960, Ab his si rursus pro 104 ʒ subtrahantur 416: & pro 80 ℞ itidem 160, ratione signorum subductionis, supererunt 384. Quibus 100 adiuncta 484. Tantus & duorum numerorum inter se æqualium & inter se ductorum valor est. Nam 6 ʒ + 4 ℞ — 10 valent 22, quæ multiplicata in sese procreant τετράγωνον 484.

Eadem est ratio multiplicationis duorum numerorum Cossicorum inæqualium: ut 2 ℞ multiplicatæ in 3 ℞ faciunt 6 ʒ.

Resoluta δοκιμασίας gratia radice in absolutum, 2 ℞ valebunt 4: 3 ℞ valebunt 6. His inter se multiplicatis, exeunt 24. Tantum valent 6 ʒ.

Ἀπόδειξις pendet ex porismate prop. 11. lib. 9. Quilibet numerus progressionis Geometricæ ab unitate incipientis seipsum multiplicans producit numerum eiusdem progressionis, qui tantum ab eo distat exclusiuè, quantum ipse abest exclusiuè ab unitate: ut ȼ seipsum multiplicans producit ʒȼ tertium post ȼ, ut ȼ tertium post N.

Exemplum tertij casus. *Sint duo numeri compositi & diminuti 6 ℞ — 8 & 2 ℞ — 10.*

Δ. Opor-

Δ. Oportet *datos numeros inter se multiplicare.*

Κατ. *Quando numerus Cossicus compositus vel diminutus multiplicatur per Cossicum tam simplicem, quàm compositum diminutumúe, præter multiplicationẽ de præscripto præcedentium regularum, habenda est maxima ratio horum signorum ✠ & ---. Nam quando numeri si mutuo multiplicantes habuerint idem signum ✠ vel --- apponitur producto semper hoc signum ✠. Quando vero alter illorum habuerit signum ✠, & alter hoc --- afficitur productum perpetuò hoc signo ---. Quod alij scriptores docent his verbis. Eadem signa ponunt signum additionis. Diversa signa ponunt signum subtractionis: in nostro exemplo sic.*

6 ℞ --- *8*

2 ℞ --- *10*

--- *60* ℞ ✠ *80*

12 ℨ --- *16* ℞

Productum 12 ℨ --- *76* ℞ ✠ *80.*

12 ℨ *annectuntur 16* ℞ *signo --- eò quod utriusq; numeri signa sunt diversa. Rursus 10 ducta in 6* ℞ *producunt 60* ℞, *quæ 16* ℞ *subiunguntur præmisso signo subductionis propter eandem causam. Cossici verò numeri, qui neutrum horum signorum ante se habent, vendicant sibi signum additionis, ut supra annotatum fuit. Tandem 10 in 8 multiplicata edunt 80, quæ post radicum numerum collocantur præcedente signo additionis, eò quod numeri utriusq; idem est signum. In dispositione autem ὁμώνυμοι collocantur sub ὁμωνύμοις.*

Δοκιμασία. Resoluta una radice in octonarium 6 R. --- 8, valent 40. 2 R. --- 10 valent 6: quibus in 40 ductis exeunt 240. Tantundem valet & productum. Nam 12 ℨ continent 768: à quibus si reijciantur (sequitur enim signum ---) 608 pro 76 R. restabunt 160. His si rursus adiungantur 80 (præcedit enim signum ✠) emergunt 240, ut antea.

ὑπόθ. & *EXEMPLA* quarti casus, *ubi numeri compositi sunt abundantes & mixti.*

6 ℞ ✠ 8	6 ℞ --- 4
2 ℞ ✠ 10	2 ℞ ✠ 5
12 ʒ ✠ 16 ℞	12 ʒ --- 8 ℞
60 ℞ ✠ 80	✠ 30 ℞ --- 20
Prod. 12 ʒ ✠ 76 ℞ ✠ 80.	12 ʒ ✠ 22 ℞ --- 20.

6 ʒ ✠ 8 ℞ --- 6

2 ʒ --- 4

12 ʒʒ ✠ 16 ℭ --- 12 ʒ

24 ʒ --- 32 ℞ ✠ 24

12 ʒʒ ✠ 16 ℭ --- 36 ʒ --- 32 ℞ ✠ 24.

In primo exemplo eadem sunt utrobiq; signa additionis: unde & productu idem signum præponitur.

In altero exemplo 2 ℞ in 4 ducta, procreant 8 ℞ cum signo subductionis, quod signis discrepant. Rursus 5 in 6 ℞ faciunt 30 ℞ cum signo additionis, quod idem utriusq; signum. Et 4 in 5 gignunt 20 cum signo subtractionis: signis enim hi differunt.

Tertij exempli δοκιμασία est hæc. Resolutis Cossicis in absolutos, multiplicandus erit 34: multiplicans 4. His inter se multiplicatis, fiunt 136. Tantus est residui valor. Nam 12 ʒʒ habent 192. 16 ℭ habent 128: his additis fiunt 320. Ab his si pro 36 ʒ ratione signi subductionis auferantur 144, restant 176. Si rursus ab hoc residuo pro 32 ℞ ob præcedens itidem signum subtractionis deducantur 64, remanent 112, quibus 24 coniuncta absoluunt 136.

ὑπόθ. quinti casus. *Sint duo numeri irrationales simplices, eiusdem denominationis* √ʒ 9 & √ʒ 4.

Δ. Oportet *unum ex datis in alterum ducere.*

Κατ. Tantum multiplicantur numeri absoluti inter se, relicto eodem signo sic. $\sqrt{z}\,9$

$\sqrt{z}\,4$

Productum $\sqrt{z}\,36$.

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico* $\sqrt{z}\,36$ *esse productum duorum datorum numerorum in se ductorum.*

Δοκιμασία. $\sqrt{z}\,36$ est 6: quibus æquipollent 2 in 3 ducta. Nam $\sqrt{z}\,9$ est 3: $\sqrt{z}\,4$ est 2.

σχόλιον.

Medialium multiplicatio alia est duplicatio, alia multiplicatio quadrata, alia cubica, alia reliquorum generum.

Duplicatio, ut $\sqrt{z}$ 4, bis sumta facit $\sqrt{}$ 8, id est 4: sic $\sqrt{c}$ 8 bis sumta facit 16, id est, 4. Et sic de alijs. Duplicatio enim fit addendo numerum ad seipsum.

Multiplicatio quadrata fit multiplicando numerum absolutum in se pro characteris ipsius appellatione: ut $\sqrt{z}$ 8 in se quadratè ducta facit $\sqrt{z}$ 64, id est, 8.

Multiplicatio cubica fit multiplicando numerum in se cubicè, ut $\sqrt{c}$ 12 in se cubicè facit $\sqrt{c}$ 1728, id est, 12. Sed $\sqrt{z}$ 8 cubicè facit $\sqrt{c}$ 1728, id est, 12. $\sqrt{z}$ 8 cubicè facit $\sqrt{z}$ 512. $\sqrt{z c}$ 6 quadratè facit $\sqrt{z c}$ 36, id est, $\sqrt{c}$ 6. Eadem vero cubicè facit $\sqrt{z c}$ 216. hoc est, $\sqrt{z}$ 6.

Constat igitur ex multiplicatione irrationalium inter se produci numerum rationalem. Et medialium multiplicatio quadrata, cubica & reliquorum id generis, nihil aliud est, quàm characteris multiplicationem indicantis deletio.

Ἐκθ. sexti casus. *Sint duo numeri irrationales simplices diuersa denominationis, 8 &* $\sqrt{z}$ *2.*

Δ. Oportet *hos duos numeros in se ducere.*

Κατασ. *Numeri diuersa denominationis reducuntur ad numeros eiusdem denominationis sic. Ex 8 absolutis fiunt* $\sqrt{z}$ *64. Iam bis 64 sunt 128.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico 128 esse productum, emergens ex multiplicatione 8 in* $\sqrt{z}$ *64.*

Δοκιμα-

Δοκιμασία difficilis non est. Nam 8 est √64 quæ in 2 ducta faciunt 128.

ἐκθ. septimi casus. *Sint duo numeri irrationales compositi: ꝗꝗ primum abundantes 4 ✠ √7 & 4 ✠ √8.*

Δ. Oportet *hos duos numeros in se ducere.*

Κατασκ. *Præter ea, quæ paulo ante, tradita sunt, diligens signorum ratio habenda est. Nam eadem signa ponunt signum additorũ: diuersa vero signa ponunt signum subtractorum, hoc modo.*

	Reductio.
4 ✠ √ʒ 7	√ʒ 16 ✠ √ʒ 7
4 ✠ √ʒ 8.	√ʒ 16 ✠ √ʒ 8.
Productum 16 ✠ 112.	✠ √ʒ 128 ✠ √ʒ 56.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico productum ex 4 ✠ √ʒ 7 in 4 ✠ √ʒ 8 esse 16 ✠ 112.*

ἐκθ. octaui casus. *Sint duo numeri irrationales compositi, ꝗꝗ diminuti 6 --- √ʒ 20, & 8 --- √ʒ 45.*

Δ. Oportet *hos duos numeros in se ducere.*

Κατ. *Eadem quæ antea, hoc modo.* *Reductio.*

6 --- √ʒ 20	√ʒ 36 --- √ʒ 20
8 --- √ʒ 45	√ʒ 64 --- √ʒ 45.
48 --- √ʒ 1280 --- √ʒ 1620 ✠ 30.	

In hoc exemplo ex --- √ʒ 45 in --- √ʒ 20 fit ✠ √ʒ 900, hoc est, ✠ 30: & ex --- √ʒ 45 in ✠ 6, id est, in --- √ʒ 36 fit --- √ʒ 1620: & ex --- √ʒ 20 in ✠ 8, hoc est, in ✠ √ʒ 64, fit --- √ʒ 1280. Ac deniq; ex ✠ 8 in ✠ 6 fit ✠ 48. Eritq; totus numerus productus, ut supra, qui si fiat reductio per additionem & subtractionem erit 78 --- √ʒ 5780. Nam ex ✠ 48 & ✠ 30, fiunt ✠ 78. Et ex --- √ʒ 1280: & --- √ʒ 1620, quia commensurabiles sunt, fit --- √ʒ 5780.

ἐκθ. noni casus. *Sint duo numeri irrationales mixti, ꝗꝗ inter se æquales 6 ✠ √ʒ 8 & 6 --- √ʒ 8.*

Δ. Opor-

Δ. Oportet *hos duos numeros in se ducere.*

Κατ. *Multiplicatio numeri compositi quadratarum radicum per similem numerum diminutum breuissimè fit. Si in alterutro numerorum ex quadrato particulæ prioris dematur quadratum posterioris particulæ, siue posterior particula minor sit priore, siue maior, hoc modo.*

	Reductio.
6 ✠ √ ȝ 8	36 ✠ √ ȝ 8
6 --- √ ȝ 8	36 --- √ ȝ 8
36 ✠ 288 -- √ ȝ 288 -- 8.	Productum --- 28.

In hoc exemplo pro 64 pono 8 tantum: secundum regulam supra positam. Multiplicatio quadrata est characteris deletio. Totum autem productum valet 28: id quod numerorum inuentorum additio & subtractio euidenter ostendit: productum vero 28 inuentum est sic. 8 quadratus numerus posterioris particulæ √ ȝ 8 subtrahitur ex 36 numero quadrato prioris particulæ 6 & relinquitur 28.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico numeros datos compositos mixtos quadratè multiplicatos breuiter efficere 28.*

Ἀπόδειξις pendet ex 115 prop. lib. 10, quæ probat fieri posse, ut spacium rationale contineatur sub duabus rectis irrationalibus, siue duobus numeris irrationalibus inter se ductis producatur unus numerus, isque rationalis.

Quod si posterior particula maior sit, producitur numerus diminutus: ut in apposito exemplo.

	Δοκιμασία.
2 ✠ √ ȝ 16	2 ✠ √ ȝ 16
2 --- √ ȝ 16.	2 --- √ ȝ 16.
4 ----- 16.	--- √ ȝ 64 --- 16.
	4 ✠ √ ȝ 64
	4 ------ 16.

Hic 16 quadratus numerus particulæ demtus ex 4, quadrato numero particulæ prioris relinquit 4 --- 16.

ἐκθ. decimi casus. *Sint duo numeri irrationales, iiq; inter se inæquales, 2 --- √ 3, & 3 ✠ √ 5.*

Δ. Oportet *hos duos numeros in se ducere.*

ΚΑΤ. *Eadem est, quæ septimi casus, hoc modo.*

	Reductio.
2 --- √3	*4 --- √3*
3 ✠ √5	*9 ✠ √5*
✠ √20 --- √15	*ALIVD.*
6 --- √27	*30 ✠ √48*
6 ✠ √20 -- ℞27 --- √15.	*40 --- √12*
	--- √1200 --- 24
	400 ✠ √76800
	376 ✠ √58800.

In priore exemplo surdæ particulæ, quia inter se communicantes non sunt, in summa suis signis affectas posuimus.

In posteriore 400 habemus in productis: sed quia 24 desunt (nam signo --- notare oportuit) principia dictant nos habere 400, demtis 24: quæ quasi debemus: ut in promtu sit, ijs persolutis, nos habere 376, hoc modo.

400
24
376.

Rursus de √76800 subtracta √1200, restant √58800. Nam abbreuiatio per communem mensuram 1200 terminos minimos facit 64 & 1 quorum radices 8 & 1. 1 ab 8 manet 7: septies septem sunt 49, quæ ducta in 1200, faciunt √58800.

MVLTIPLICATIO COSSICORVM FRACTORVM.

ΠΡΌΤΑΣΙΣ. Numerum Cossicum fractum in alterum multiplicare.

Duo sunt casus. Numerus enim Cossicus fractus, aut est rationalis, aut irrationalis.

ΚΑΘ.

ἐκθ. primi casus. *Sint duæ minutiæ Cosſicæ rationales* $\frac{9\,ʒ + 8\,℞}{6}$ *&* $\frac{3}{2}$ ℞.

Δ. Oportet *unam in alteram multiplicare.*

Κατ. *Multiplicatio fit per directam lineam: ut in numeris integris: & ratio characterum Cosſicorum & signorum prosthaphæreticorum habetur: hoc modo. 3 ℞ per 9 ʒ, faciunt 27 ȼ: 3 ℞ per 8 ℞ faciunt 24 ʒ: & bis 6 sunt 12.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 27 ȼ + 24 ʒ esse productum* $\frac{9\,ʒ + 814}{6}$ *multiplicatarum per* $\frac{3}{2}$ ℞.

Δοκιμασία. Si resoluas Cosſicos usitata per binomium analysi, habebit multiplicandus $\frac{52}{6}$: multiplicans $\frac{6}{2}$. Facta multiplicatione inter se horum, nascuntur inde $\frac{312}{12}$: vel 26 integra. Tantundem valent 27 ȼ + 24 ʒ. Nam 27 ȼ valent 216. At 24 ʒ valent 96. Ex his additis fiunt $\frac{312}{12}$: vel 26 integra.

ἐκθ. secundi casus. *Sint duæ minutiæ irrationales* √ʒ $\frac{3}{4}$ *&* √ʒ $\frac{6}{7}$.

Δ. Oportet *has minutias in se inuicem ducere.*

Κατ. *Multiplicatio minutiarum irrationalium si characteres consentiunt, ut in minutijs vulgaribus traditum est, absoluitur, hoc modo.* √ʒ $\frac{3}{4}$ *per* √ʒ $\frac{6}{7}$ *productum* √ʒ $\frac{18}{28}$.

Quod si dissentiant, ad eundem characterem, eandemq́ denominationem reducenda sunt: ut √ʒ $\frac{36}{5}$ *per* $\frac{√ȼ\,27}{2}$ (*hoc est,* $\frac{6}{5}$ *per* $\frac{3}{2}$. *reductio ad eandem denominationem est* $\frac{√ʒ\,144}{6}$ *&* $\frac{√ȼ\,729}{6}$ *quæ ad eundem characterem reducta faciunt* $\frac{√ʒȼ\,2985984}{6}$ *&* $\frac{√ʒȼ\,531441}{6}$. *Hæc tandem inter se multiplicata faciunt*

$$\frac{√ʒȼ\,1586874322944}{36}.$$

Δοκιμασία est, quòd √ʒȼ 1586874322944 est 108: quæ per 36 diuisa faciunt 3.

DIVISIO COSSICORUM INTEGRORUM.

Πρότασις. Numerum Cossicum integrum per aliumdiuidere.

Totidem sunt casus, quot multiplicationis.

Ἔκθ. primi casus. *Sint duo numeri simplices, 48 ℞ & 8, quarum unus Cossicus simplex, alter absolutus.*

Δ. Oportet *unum per alterum diuidere.*

Κατασκ. *Diuisio peragitur prorsus ut in vulgari logistica, diuisis numeris & characteribus Cossicis nihil variatis, hoc modo. 8 in 48 ℞ habetur 6 ℞. Ergo 6 ℞ sunt quotus. Sic 24 ʒ diuisis per tria, producuntur 8 ʒ. Ergo 8 ʒ sunt quotus.*

Δοκιμασία. 6 ℞ sunt 12: & 8 ʒ sunt 32.

Ἔκθ. secundi casus. *Sint duo numeri simplices, quorum uterque est Cossicus, 36 ℞ & 9 ℞.*

Δ. Oportet *unum per alterum diuidere.*

Κατ. *Diuisio fit, ut antea. Productum vero numerus alterius denominationis hoc modo. Exponens diuisoris subtrahatur ab exponente diuidendi, & relinquetur index characteris Cossici quoto numero accommodandi, hoc modo. 9 ℞ per 36 ℞ diuisis, exeunt 4 absolute. Vnitas enim exponens radicis ab unitate retecta nihil relinquit. Sed 36 ʒ in 9 ℞ distributis, 4 ℞ proueniunt. Vnitas enim à binario remota unitatem relinquit, quæ indicat emergentem numerum ad radicum speciem referendam esse.*

Ἀπόδειξις pendet ex porismate 11. prop. 9. ut in multiplicatione dicebatur.

Quod si fiat diuisio numeri Cossici per numerum Cossicum, qui maiorem characterem habeat, abijce ut prius characterem minorem ab utriusque numeri Cossici characteribus: & diuisorem subijce diuidendo, interiecta, ut fit in fractionibus linea. Et in tali casu semper numerator fractionis erit numerus absolutus: ut 3 ℞ diuisæ per 7 ß, & reductæ ad minima faciunt $\frac{3}{7}$ ʒʒ. Sic 8 ʒ per 2 ʒ ℭ faciunt $\frac{4}{1}$ ʒʒ.

Ἐκθ. tertij casus. *Sint duo numeri quorum unus Cosſicus compositus, alter abſolutus, 36 ℞ ✠ 24 & 4.*

Δ. Oportet *unum per alterum diuidere.*

Κατ. *Diuiſio fit eodem modo, quo in primo caſu diuiſis numeris: characteribus vero Coſſicis & ſignis additionis ac ſubtractionis nihil variatis, hoc modo. 4 in 36, nouem: 4 in 24, ſex.*

Δ. *Dico quotum 36 ℞ ✠ 24 diuiſarum per 4 eſſe 9 ℞ ✠ 6.*

Δοκιμασία. Si resoluta uſitata analyſi radices, diuidendus habebit 96. Nam 36 faciunt 72, quibus ſi addantur 24, fiunt 96. Iam 96 diſtributis quaternario, 24 exeunt. Tantum valent & 9 ℞ ✠ 6. Sic 36 ȝ --- 24 ℞ diuiſis in 4, obueniunt quoto 9 ȝ --- 6 ℞. Veritatem quoti oſtendit analyſis Coſsicorum numerorum. Nam 36 ȝ valent 144: 24 ℞ valent 48: quibus reiectis à prioribus (propter ſignum ---) reſtant 96, quæ diuiſa per 4, producunt 24. Tantum valent & 9 ȝ --- 6 ℞. Nam 9 ȝ ſunt 36: 12 ℞ ſunt 12, quæ ſubtracta à 36, relinquunt 24.

Ἐκθ. quarti caſus. *Sint duo numeri Coſſici, quorum unus compoſitus, alter ſimplex, 45 cf ✠ 36 ȝ ✠ 27 ℞ & 9 ℞.*

Δ. Oportet *unum numerum per alterum diuidere.*

Κανων. *eadem quæ ſecundi caſus, hoc modo. 9 in 45 diuiſis, exeunt 5, ijſdem in 36, prodeunt 4: ijſdem in 27, fiunt 3. Character autem ℞ à charactere cf detractus ȝ: à ȝ vero ℞: deniq; à ℞ abſolutum relinquit numerum.*

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico numero dato per datum diuiſo cedere quoto 5 ȝ ✠ 4 ℞ ✠ 3.*

Δοκιμασία. Nam diuidendus habet 558: diuiſor 18: quotus 31: quibus æquantur 5 ȝ ✠ 4 ℞ ✠ 3. Nam 5 ȝ valent 20: & 4 ℞ valent 8, quibus ſi coniunctis propter ſignum ✠ adijcias 3, fiunt 31. Sic 45 cf --- 36 ȝ --- 27 ℞, ſi ruſus in 9 ℞ partiaris, numerus quotus conſtabit 5 ȝ --- 4 ℞ --- 3. Diuidendus enim valebit 162: diuiſor 18: quotus 9 Tantus eſt valor & coſsici numeri 5 ȝ -- 4 ℞ -- 3. Sic 45 cf ✠ 36 ȝ — 27 ℞ ſi diſtribuas in 8 ℞, quotus naſcetur talis $5\frac{5}{8}$ ȝ ✠ $4\frac{1}{2}$ ℞ — $3\frac{3}{8}$.

Diuidendus enim habet 450: diuisor 16: quotus 28 ⅛, quibus æquantur 5⅝ ℨ ✠ 4½ ℞ — 3⅛.

ἔκθ. quinti casus. *Sint duo numeri Cosʃici, ijq; ambo compoʃiti, 30 ℨ --- 58 ℞ ✠ 24 & 5 ℞ --- 3.*

Δ. Oportet *datum numerum per alterum diuidere.*

Κατ. *Si diuidendus & diuiʃor ʃint communicantes, ʃemper eius in alterutrum multiplicantium partitio remittet alterum: hoc modo. 30 ℨ per 5 diuiʃis fiunt 5 ℞, & rurʃus 6 ℞ per 5 ℞ multiplicata reʃtituunt 30 ℨ pracisè. Quare peracta diuiʃione 30 ℨ conʃiguntur. At 3 per 6 ℞ multiplicata, procreant 18 ℞ cum ʃigno --- ʃecundum regulam. Diuerʃa ʃigna ponunt ʃignum ---. His à 58 ℞ detractis, relinquuntur --- 40 ℞ rurʃus cum ʃigno ---. Eadem ʃigna ponunt idem in ʃubtractione. Reʃtant igitur de diuidendo --- 40 ℞ ✠ 24. Hac rurʃus diuidantur diuiʃore promoto --- 40 ℞, qua diuiʃa 5 ℞ gignunt --- 8. His multiplicatis in 5 ℞ --- 3 prouenit numerus, qui diuidendum totum æquans abolet.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico dato numero per alterum datum diuiʃo quotum eʃʃe 6 ℞ --- 8.*

Δοκιμασία. Diuidendus habet 28, diuiſor 7. Quotus numerus 4. Tantum valent & 6 R. --- 8.

Quod ſi diuidendus & diuiſor non ſunt communicantes, diuiſio regulariter fieri non poteſt: diuiſor autem ſubſcribitur diuidendo interpoſita linea ad morem minutiæ: qua fractione utendum, dos nec offeratur æquatio aliqua, quæ diuiſionem expediat & compleat: de qua in reductione æqualium docetur.

Ἔκθ. ſexti caſus. *Sint duo numeri irrationales ʃimplices eiuʃdem denominationis, √ℨ 70 & √ℨ 7.*

Δ. Oportet *unum ex datis per alterum diuidere.*

Κατ. *Duæ radices eiuʃdem generis inter ʃe diuiduntur, & quoto numero idem ʃignum radicale præponitur, hoc modo. 7 per 70 diuiʃis, exeunt 10, quibus character ℨ preʃigitur ʃic, √ℨ 10.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico √ℨ 10 eʃʃe quotum duorum datorū numerorum, √ℨ 70 & √ℨ 7 inter ʃe diuiʃorum.*

ἔκθ.

Ἔκθ. septimi casus. *Sint duo numeri irrationales, simplices diuersi generis, √ȝ ℭ 24 & √ℭ 2.*

Δ. Oportet *unum ex datis per alterum diuidere.*

Κατασκ. *Radices diuersi generis reducendæ sunt ad eundem characterem: deinde diuisio instituenda ut prius, hoc modo. Primùm duæ radices reductæ ad idem nomen sunt hæ: √ȝ ℭ 24, & √ȝ ℭ 4. Nam 2 ducitur in se quadratè & producto 4, præter signum ℭ apponitur etiam signum ȝ, ut fiat √ȝ ℭ 4: deinde diuisa √ȝ ℭ 24 per √ȝ ℭ 4 fit quotus √ȝ ℭ 6.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico √ȝ ℭ 6 esse quotum duorum datorum numerorum inter se diuisorum.*

Eodem modo ex √ȝ 18 per $1\frac{1}{2}$ fit √ȝ 8. Numerus enim $1\frac{1}{2}$ ductus in se quadratè facit $2\frac{1}{4}$, cui præponendum est signum ȝ: ut fiat √ȝ $2\frac{1}{4}$: atque ita diuisa √ȝ 18 per √ȝ $2\frac{1}{4}$, hoc est, per √ȝ $\frac{9}{4}$ fit quotus √ȝ 8.

Ἔκθ. octaui casus. *Sint duo numeri irrationales, unus compositus: alter simplex: √ȝ 20 -- √ℭ. 10 & radix simplex 3.*

Δ. Oportet *compositum per simplicem diuidere.*

Κατ. *Eadem est quæ præcedentis casus, hoc modo. √ȝ 20 per 3, id est, per √ȝ 9 fit quotus √ȝ $2\frac{2}{9}$: diuisa verò -- √ℭ 10 per + 3, id est, per + √ℭ 27, fit quotus -- √ℭ $\frac{10}{27}$.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico √ȝ $2\frac{2}{9}$ -- √ℭ $\frac{10}{27}$ esse quotum duarum datarum radicum inter se diuisarum.*

Sic √ȝȝ 8 + √ß 3 diuisis per √ȝ 2 quotus est √ȝȝ 2 + √ȝß $\frac{9}{32}$. Reducendæ enim sunt √ȝȝ 8, & √ȝ 2 ad √ȝȝȝ 64, & √ȝȝȝ 16 eiusdem denominationis, diuisaque illa per hanc fit quotus √ȝȝȝ 4, hoc est, √ȝȝ 2.

Ἔκθ. noni casus. *Sint duo numeri compositi 6 + √20 -- √27 -- √15 & diuisor abundans 2 + √3.*

Δ. Oportet *datos numeros inter se diuidere.*

Κατασκ. *Si diuisor fuerit abundans siue binomium, per ipsius diminutum*

minutum siue recisum multiplica numerum diuidendum, & diuisorem ipsum: si vero diuisor fuerit diminutus, per ipsius abundantem multiplica similiter tum diuidendũ, tum diuisorem: & proueniet semper ex multiplicatione diuisoris numerus simplex, isq; nouus diuisor: qui autem ex multiplicatione diuidendi per diuisorem compositum producitur, eum per nouum diuisorem partiemur: exurgetq; quotus quæsitus, hoc modo.

Multiplicatio diuisoris in se.

2 + √ 3.
2 --- √ 3.

--- √ 12 ----- 3.
+ 4 + √ 12

4 ———————— 3, *id est, unum, diuisor.*

Multiplicatio diuisoris in diuidendum.

6 + √ 20 --- √ 27 --- √ 15.
2 + √ 3

+ √ 108 + √ 60 ----- 9 --- √ 45
12 √ 80 --- √ 108 --- √ 60

Productum 3 + √ 5.

In hoc exemplo, quia diuisor est abundans, nempe 2 + √ 3, fit multiplicatio diuisoris per seipsum, & per diuidendum, mutato signo + in ---, & prouenit ex multiplicatione diuisoris in seipsum 1 numerus simplex, isq; nouus diuisor: ex multiplicatione autem diuidendi per diuisorem 3 + √ 5, nouus diuidendus.

Est autem √ 3 in √ 3 productum 3: quia ut supra dictum, multiplicatio quadrata est characteris deletio. Deinde √ 3 ducimus in 2 (siue per reductionem) in 4 & fiunt 12: & tandem 2 ℞ in 2 ℞ ducta faciunt 4. In productis addendis --- √ 12, & + √ 12 se mutuo abolent. Restant igitur 4 --- 3, id est, unum.

Sic in altera multiplicatione ter 15 sunt 45: ter 27 (& per reductionem

ctionem ad minimos terminos) 3 sunt 9: ter 20 sunt 60: ter 6 (per reductionem 36) sunt 108. Rursus bis (per reductionem quater) sunt 60: bis (per reductionem quater) 27 sunt 108: bis (per reductionem quater) 20 sunt 80, bis 6 sunt 12.

In productis addendis ✠ √ 108 & -- √ 108: itemq; ✠ √ 60 & — √ 60 se mutuò abolent. Iam 12 -- 9 est 3. Habes adhuc √ 80 -- √ 45, hi sunt communicantes, & defectu subtracto habemus reliquam √ 5.

Iam 1 diuisum per 3 ✠ √ 5, facit quotum 3 ✠ √ 5.

Repetitio τῆς ἀπορ. *Dico 3 ✠ √ 5 esse quotum, qui emergit ex diuisione datorum numerorum compositorum irrationalium, diuidendi & diuisoris.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 17. septimi Si duo numeri multiplicati fuerint per tertium: duo producti eam inter se habebunt rationem, quam duo ipsi numeri inter se.

Duo numeri, diuidendus & diuisor, per tertium (qui est diuisor) multiplicati sunt, & producti sunt 4 --- 3 & 3 ✠ √ 5.

Ergo eadem est ratio 4 — √ 3, ad 3 ✠ √ 5, quæ 2 ✠ √ 3 ad 6 ✠ √ 20 — √ 27 — √ 15.

2 Syll sententia. Quorum eadem est ratio, illa diuisa in se inuicem eundem quotum habent.

Duorum numerorum 4 — √ 3 ad 3 ✠ √ 5 est eadem ratio, quæ 2 ✠ √ 3 ad 6 ✠ √ 20 — √ 27 --- √ 15.

Ergo diuisis 4 — √ 3 per 3 ✠ √ 5 idem est quotus qui emergit diuisis 2 ✠ √ 3 per 6 ✠ √ 20 — √ 27 — √ 15.

Hinc apparet ratio multiplicationis & diuisionis in supputatione. Nam multiplicatio per diuisorem parit duos numeros eiusdem rationis. Diuisio ostendit quotum, quem desiderauimus. Dato enim quoto uno per diuisionem, quæ potest fieri per diuisorem nouum: dabitur alter sine diuisione, quæ ex arte fieri non potest, cum diuisor & diuidendus sint numeri compositi.

Δοκιμασία fit per contrariam multiplicationem, hoc modo.

2 — √ 3
3 + √ 5

+ √ 20 — √ 15
6 — √ 27

6 + √ 20 — √ 27 — √ 15.

DIVISIO eiusdem per diminutum.

6 + √ 20 — √ 27 — √ 15. Multipli-
3 — √ 5. catio.

— √ 180 — 10 + √ 135 + √ 75
18 + √ 180 — √ 243 — √ 135

8 — 43. Diuidendus.

3 — √ 5.
3 + √ 5

+ √ 45 — 5
— √ 45

4. Diuisor.

8 — √ 48
4 √ 16

2 — √ 3. Quotus.

σχόλιον. Quando diuisor est duarum radicum diuersarum, ex ad eandem denominationem sunt reducendæ, antequam operationem auspiceris.

Et quando diuisor est plurium particularum ac diuersarum radicum, ita ut non facile reduci possit ad simplicem diuisorem, constituēda erit fractio, autore Clauio, cuius numerator sit numerus diuidendus: & denominator ipsemet diuisor: in morem absolutorū, cum minor numerus per maiorem diuidendus proponitur, ut 3 per 4. Fit enim fractio $\frac{3}{4}$. Sic numerus √ 48 + √ cf 3. diuisus per √ 15 + √ 6 — √ 3 parit hanc fractionem, $\frac{\sqrt{\,} 48 + \sqrt{\,} cf\ 3\ N.}{\sqrt{\,} 15 + \sqrt{\,} cf\ 6 \cdot 3\ D.}$

DIVISIO MINVTIARVM COSSICARVM.

πρόβλημα. Numerum Cossicum fractum per alium diuidere.

Duo sunt casus. Numerus enim Cossicus fractus aut est rationalis, aut irrationalis.

ἐκθ. primi casus. *Sint duæ minutiæ Coßicæ, eæq; rationales* $\frac{9ʒ + 8℞}{6}$ & $\frac{3}{2}$ ℞.

Δ. Oportet *maiorem per minorem diuidere.*

Κατ. *Diuisio minutiarum Coßicarum fit, ut vulgarium, decussatim inter se multiplicatis minutiarum partibus diuersis. In characterum vero Coßicorum, qui numeris adhærent multiplicatione & prosthaphæreticorum variatione seruentur regulæ, quæ de integris supra exposita sunt, hoc modo.*

Ducantur 2 in 9ʒ + 8 ℞, & oriuntur inde 18ʒ + 16 ℞, quæ collocantur supra lineam transuersam loco numeratoris. Mox ducantur & 6 in 3 ℞, & emergent 18 ℞ sub linea, denominatoris loco statuenda. Nascuntur ergo ex hac partitione $\frac{18ʒ + 16℞}{16℞}$.

Repetitio τῦ διορ. *Dico* $\frac{18ʒ + 16℞}{18℞}$ *esse minutiam quotam ex diuisione numerorum datorum.*

Δοκιμασία per analysin. Nam 18ʒ valent 72: 16 ℞ habent 32, quæ si coniungantur, fiunt 104: denominatoris 18 ℞ habent 36. Iam 104 diuisa per 36 faciunt $2\frac{8}{9}$. Idem valor prodit, si partiaris $5\frac{2}{6}$ per $\frac{6}{2}$. Nam 9ʒ + 8 ℞ resolutæ per duo, habent $5\frac{2}{6}$: at $\frac{3}{2}$ ℞ habent $\frac{6}{2}$.

ἐκθ. secundi casus. *Sint duæ minutiæ irrationales, eæq; simplices* √ʒ $\frac{3}{4}$ & √ʒ $\frac{7}{8}$.

Δ. Oportet *unam per alteram diuidere.*

Κατασκ. *Quando duæ radices diuidendæ sunt eiusdem generis, multiplicantur earum numeri inter se decussatim, & producto numero idem signum radicale præponitur, hoc modo.*

√ʒ $\frac{3}{4}$ ╳ √ʒ $\frac{7}{8}$. *Quotus* √ʒ $\frac{24}{28}$, *id est,* √ʒ $\frac{6}{7}$.

Δοκιμασία per contrariam multiplicationem, sic. √ʒ $\frac{6}{7}$ √ʒ $\frac{7}{8}$ | $\frac{42}{56}$, hoc est, $\frac{3}{4}$. Diuidendus, siue diuisus.

Quando vero duæ radices diuidendæ sunt diuersi generis: utraque prius reducenda est, tum ad idem signum, tum ad eandem denominationem: reductione perfecta, abijciuntur denominatores

perficiturque diuisio per numeratores, ut sit diuidenda

$$\frac{\sqrt{ȝ}\,ℭ\ 512000000 + \sqrt{ȝ}\,ℭ\ 26873856}{10} \text{ per } \frac{\sqrt{ȝ}\,ℭ\ 2359296}{10}$$

Reiectis denominatoribus, diuido √ ȝ ℭ 51200000 + √ ȝ ℭ 26873856 per √ ȝ ℭ 2359296. Erit numerus quotus √ ȝ ℭ 217$\frac{7}{8}$ vel √ ȝ 7$\frac{5}{8}$ + 1$\frac{1}{2}$.

EXTRACTIO RADICVM.

Πρότασις. Ex dato numero Cossico radicem extrahere.

Plures sunt casus extractionis radicum. Aut enim radix extrahitur quadrata, aut cubica, aut zensizensica, &c. rursus ex numero vel simplici, vel composito: eoq́ vel rationali, vel irrationali.

Ἔκθ. primi casus. *Sint numeri Cossici simplices, ijq́ rationales, & radicem habentes, & capaces exponentis inuenti per diuisionem 36 ȝ, 8 ℭ, 81 ȝȝ.*

Δ. Oportet *ex datis numeris radicem quamcunq́ extrahere.*

Κατ. *Extractionis radicum è numeris datis duæ sunt partes: prima extractio radicis ex numero dato quasi absoluto, relicto charactere: altera, extractio quoad characteres cossicos.*

Prima extractio nihil variat à vulgari: altera exponentem characteris eiusdem numeri diuidit per exponentem characteris radicis, quæ quæritur: quotus exponentem characteris, à quo radix quæsita denominabitur, ostendet, hoc modo.

Sit inuenienda radix quadrata numeri 36 ȝ, hac tanquam numeri absoluti est 6. Exponens huius characteris ȝ est 2, eaq́ duobus modis: tum ut affixi numero dato: tum ut radicis, quæ quæritur, nempe censica. Iam diuiso 2 per 2, fit 1, indicans exponentem characteris ℞. Est ergo 6 ℞ radix quadrata huius numeri 36. Nam si hic numerus 6 ℞ in seipsum ducatur, producetur numerus propositus 36 ℞.

Rursus sit eruenda radix quadrata ex 36 ȝ ℭ. Accepta radice quadra-

quadrata numeri, nempe 6 diuidatur exponens huius characteris ℨℭ, nempe 6, per exponentem radicis quadratæ, nimirum per 2, reperieturq́ exponens 3, cuius character est ℭ. Ergo 6 ℭ radix quadrata est huius numeri 36 ℨℭ. Nam 6 ℭ posito uno cubo pro 8 faciunt 48 : 1 ℨℭ vero 64, quæ per 36 multiplicata constituunt 2304, quorum radix quadrata 48. Et radix censicubica de 64 primū est 8. id est, census unius cubi : cuius radix cubica est 2, eaq́ censicubica N. 64.

Sic radix cubica 8 ℭ erit 2 ℞. Nam 8 cubi faciunt 64, quorum radix cubica 4, quæ 2 ℞ constituunt.

Et radix censica de 81 ℨℨ est 9 ℨ & censica de 9 ℨ est 3 ℞. Nam 81 ℨℨ sunt 1296 : 9 ℨ sunt 36, radix de 1296 : rursus radix de 9 ℨ sunt 3 ℞.

ἐκθ. secundi casus. *Sit numerus Cossicus simplex, isq́ radicem quidem habens, sed non capax exponentis inuenti per diuisionem, nempe 16 ℭ.*

Δ. Oportet *numeri dati radicem quamcunq́ extrahere.*

Κατ. *Si numerus vel non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuisione exponentium non producatur numerus exponens integer, carebit propositus numerus radice illa, quæ desideratur. Numerus igitur datus 16 ℭ neq́ radicem quadratam habet, neq́ cubicam. Nam licet 16 quadratus sit numerus : tamen ex diuisione 3 exponentis scilicet cubi per 2 exponentem quadratæ radicis prouenit numerus 1½, cui nullus character respondet. Rursus etsi ex diuisione 3 exponentis huius characteris ℭ per 3, exponentem radicis cubicæ, proueniat 1. exponens characteris huius ℞ : tamen numerus 16 caret radice cubica.*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico ex numero dato 16 ℭ non posse radicem rationalem extrahi.*

ἐκθ. tertij casus. *Sit numerus Cossicus compositus, isq́ vel arte factus, vel alteri æquatus. Sit autem primum arte factus hic. 16 ℨ — 40 ℞ + 25.*

Δ. Oportet *ex dato binomio radicem quadratam extrahere.*

Κατασκ. *Ex quadratis Cosſicis arte factis radices eliciuntur non aliter quàm ex quadratis vulgaribus: radici autem inuentæ alter, tertiusúe quotus annectatur mediante ſigno* ✠ *vel* — *cum ſuis characteribus, ut in diuiſione, hoc modo.*

1. Tertius quiſq; puncto notatur, punctum igitur erit ſupra 25 & 16 ʒ. Duo puncta duos numeros radices diſtinctas conſtituent.

2. Radix de 16 ʒ eſt 4 ℞. Character radicis additur. Eum enim dimidium exponentis ʒ, ſcilicet unitas indicat.

3. Radicis inuentæ duplum (id eſt, 8 ℞) collocetur ſub 40 ℞, fiatq; diuiſio, quæ quoto 5 decernit, cum ſigno - - propter diuerſa ſigna. Fit enim diſtributio — 40 ℞ in ✠ 8 ℞. Tandem 5 ducta in 8 ℞ gignunt 40 ℞: & eadem 5 ducta in ſeſe pariunt 25, quæ etiam ſubtrahenda: unde nihil relinquatur.

40
16 ʒ — 40 ℞ ✠ 25 (4 ℞ — 5.
8

Repetitio τῆς διορ. *Dico 4 ℞ - - 5 eſſe radicē numeri Coſsici dati.*

Ἀπόδειξις eſt eadem, quæ vulgaris extractionis.

Δοκιμασία per multiplicationem.

4 ℞ — 5
4 ℞ — 5
20 25
20 ℞
16. —— 40 ✠ 25.

Eodem modo radix quadrata de 36 ʒʒ ✠ 48 ⊄ — 104 ʒ — 80 ℞ ✠ 100 eſt 6 ✠ 4 ℞ — 10.

Sit ſecundò numerus Coſsicus compoſitus æquatus alteri, nimirum 1 ʒ: iſque conſtans vel numero abſoluto & Coſsico notato charactere ℞, cum ſigno ✠, ut 48 ✠ 8 ℞: vel numero abſoluto & Coſsico, notato charactere ℞ cum ſigno — pertinente ad numerum Coſsicum, ut 48 — 8 ℞: vel numero abſoluto & Coſsico notato charactere ℞ cum ſigno —, pertinente ad abſolutum numerum & non Coſsicum, ut 12 ℞. — 32.

Δ. Opor-

Δ. Oportet *ex datis numeris Cossicis compositis trium generum radicem quadratam extrahere.*

Κατ. *1. Dimidium numeri Cossici tanquam absoluti assume, idq; cum signo + aut sepositum serua.*

2. Huius dimidij quadratum adde ad numerum absolutum, si ipse fuerit signo + affectus: vel aufer minorem à maiori, si signo — fuerit notatus.

3. Ex hoc ultimo numero, qui ex additione aut subtractione prouenit: radicem extrahe: eiq; rursus dimidium numeri Cossici antea sepositum adde, si fuerit signo + affectum: sin signo — aufer minorem à maiori: productum vel residuum erit radix quæsita. In exemplis verò tertij casus duplex est radix, maior & minor: maior exit, dimidio numeri radicum accommodato radici quadratæ ante inuentæ: minor autem ab eodem dimidio numeri radicum prius inuenta radice quadrata reiecta.

Primi casus *κατασκ. in qua 1 ʒ æquatur 48 + 8 ℞. 1. Dimidium de 8, numero Cossico est 4.*

2. Hoc in sese ductum facit 16, quæ addita absoluto numero 48 procreant 64.

3. Radix quadrata de 64 est 8, quibus si rursus 4. dimidium antea sepositum addideris, fient 12 excluso charactere: adiecto vero signo +.

Repetitio *τοῦ διορισμοῦ. Dico 12 esse radicem censicam dati numeri 48 + 8 ℞, id est, 1 ℞ valere 12: æquari autē 48 + 8 ℞ & 144.*

Δοκιμασία. 12 in se ducta consice faciunt 144, æquantia numerum Cossicum 48 + 8 ℞. Nam 8 ℞ (una valente 12) faciunt 96, quæ addita ad 48, constituunt 144.

Sic 1 ʒ æquatus 1 ℞ + 35156 facit $\frac{375}{2}$ vel 188 integra. Dimidium enim 1 ℞ est ½: quadratum illius ¼: quod additum absoluto numero valet $\frac{140625}{4}$; cuius radix $\frac{375}{2}$: cui ½ adiecta, dimidium scilicet numeri radicum propter signum +, exeunt 188, valor 1 ℞.

Proba-

Probatur sic. Nam 188 additis ad 35156, fiunt 35344, cuius numeri radix quadrata 188. Aequantur ergo 1 ℞ + 35156 & 35344.

Secundi casus κατ. *1. Dimidiū de 8, numero radicum est --- 4.*

2. Huius quadratum est 16, quod adiectum numero absoluto 48 facit 64.

3. Radix quadrata de 64 est 8: à quibus rursus dimidium radicum detractum relinquit radicem quæsitam 4 partium.

Repetitio τῦ διορ. *Dico 4 esse radicem dati numeri 48 --- 8 ℞, id est, unam radicem valere 4.*

Δοκιμασία Pro 8 R. (cum una R. valeat 4) ratione signi --- reijce 32 ex 48: & relinquuntur 16, quorum radix quadrata valet 4. Æquantur ergo 16 & 48 --- 8 R.

Sic 1 ʒ æquatus 80 --- 11 ℞ facit 25 Dimidium enim 11 ℞ est $5\frac{1}{2}$, cuius quadratum est $\frac{121}{4}$, quibus 80 addita constituunt $\frac{441}{4}$, quorū radix quadrata $\frac{21}{2}$ siue $10\frac{1}{2}$: à qua detracto dimidio numeri radicum restant 5.

Repetitio τῦ διορ. *Dico 5 esse radicem dati numeri 80 --- 11 ℞, id est, unam radicem valere 5: æquari autem 80 --- 11 ℞. & 25.*

Δοκιμασία. Ergo 11 R. valent 55, quæ dempta ab 80 propter signum --- relinquunt 25, quorum radix quadrata 5.

Tertij casus κατ. *Dimidium numeri radicum, id est, 6 in se ductum facit 36: unde subtracta 32 propter signum — relinquunt 4, quorum radix est 2. Eadem adiecta dimidio numeri radicum, procreat radicem maiorem 8: ex eodem autem dimidio eadem detracta relinquit radicem minorem 4.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico radicem quadratam de 12 ℞ --- 32, maiorem esse 8: minorem 4: æquari autem 64 & 12 ℞ --- 32, si 1 ℞ æstimetur 8: at 16 & 12 ℞ --- 32 si 1 ℞ æstimetur valore minoris radicis 4.*

Δοκιμασία Nam 12 R. valore maioris radicis æstimatæ continebunt 95, à quibus detracta 32 relinquunt 6 : valore autem minoris radicis eædem æstimatæ continebunt 48, à quibus detracta 32 relinquunt 16. Horum radix quadrata est 4: ut 64 radix 8.

Sic

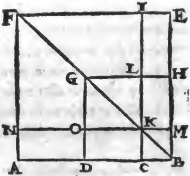
Sic 1 ʒ æquati 18 ℞ --- 72, valet radix maior 12: minor 6. Et Coßico per valorem maioris radicis resoluto idem præstabunt 144 & 18 ℞ --- 72: eodem resoluto per minoris radicis valorem æquivalebunt 36 & 18 ℞ -- 72. Dimidium enim numeri radicum 18 est 9, cuius quadratum est 81, unde subtracta 72 propter signum --- 9 supersunt, quorum radix quadrata 3, quod adiectum dimidio radicum constituit maiorem radicem 12: detractum ab eodem relinquit 6 radicem minorem.

Ἀπόδειξις Geometrica primi casus.

Extracturus radicem quadratam ex 48 + 8 ℞ faciat rectam a b, *quæ sit latus quadrati ignotum, ex qua describat quadratum* a e *una cum diametro* b f: *secet autem* a b *in puncto* c, *diuidente latus* a b *in rectam* a c *numero radicum æqualem &* c b *æqualem radici numeri absoluti. Erit igitur* a c *numerus radicum minor latere* a b *ut pars toto: ducat* d g *ipsi* a f *parallelam, quæ secet* b f *in* g: *per quod agat* g h *parallelam ipsi* a b: *deinde ducat* c i *parallelam ipsi* b e, *quæ secet* b f *in* k *&* g h *in* l. *Tandem per* k *agat* m n *ipsi* a b *parallelam, quæ secet* d g *in* o. *Quadratum igitur totius* a e *æquatur 48 + 8 ℞. Huius radix ut inueniatur, sumitur primum dimidium numeri Coßici 4, siue recta* c d: *quæ in se ducta facit quadratum* o l, *siue 16, quod additum rectangulo* c e *siue 48, numero absoluto procreat* o l *&* c e: *siue* o l *&* a m, *siue* o l *cum gnomone* l b o *siue quadratum* d h, *siue 64, cuius radix quadrata est recta* d b, *siue 8: cui additum* a d *siue dimidium antea sepositum, 4 partium, gignit totam rectam* a b *12 partium. Quod autem gnomen* l b o *sit æqualis ipsi* c e, *demonstro sic.*

1 Syll. Coroll. 4 pr. 2. Parallelogramma circa diametrum sunt quadrata. Parallelogramma *cm, ol, db* sunt circa diametrum. Ergo parallelogramma *cm, ol & db* sunt quadrata.

2 Syll. 36 primi. Parallelogramma super æqualibus basibus & inter easdem parallelas constituta inter se sunt æqualia. Ergo parallelogrammum *ao* est æquale parallelogrammo *dk*



3 Syll. 43 primi. In omni parallelogrammo supplementa parallelogrammorum circa diametrum sunt inter se æqualia. Ergo supplementa *dk*, *kb* sunt inter se æqualia.

4 Syll. 1. sent. Quæ uni sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Parallelogrammũ *ao* est æquale parallelogrammo *dk*: & eidem æquale est parall. *kb*. Ergo & *ao* est æquale ipsi *kb*.

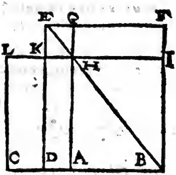
5 Syll. 2 sententia. Si æqualibus æqualia (vel unum commune) adduntur: tota erunt æqualia. Æqualibus *ao* & *kb* additur commune *dm*, Ergo rectangulum *am* est æquale gnomoni *lbo*.

6 Syll. 43 primi. In omni parallelogrammo supplementa parallelogrammorum circa diametrum sunt inter se æqualia. Ergo supplementum *ak* est æquale supplemento *ke*, & per communem sententiam addito communi *cm*, totum *am* est æquale toti *ce*, hoc est, numero absoluto.

7 Syll. sententia. Quæ uni conueniunt inter se conueniunt. Parallelogrammum *ce* est æquale parallelogrammo *am*: & parallelogrãmo *am* est æqualis gnomon *lbo*, per quintum syllogismum. Ergo rectangulum *ce* est æquale gnomoni *lbo*. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀπόδειξις Geometrica secundi casus.

Extracturus radicem quadratam ex 48 — 8 ℞ faciat rectam AB, quæ sit latus quadrati nobis ignotum, eaq; ἐπ' εὐθείας producta versus partes A, sumat rectam AC, numero radicum æqualem, quam bifariam secet in D, ut sit AD dimidium numeri radicum. Super rectam BD compositam ex latere quadrati ignoti & dimidio nu-



dio numeri radicum describat quadratũ d f,*cuius diameter* b c : *ducta deinde ipsi* d c *parallela* a g *quæ diametrũ secet in* h *ducat per* h *rectam* i l,*ipsi* b c *parallelã, quæ secet* d c *in* k, *occurratq́ rectæ, quæ ex* c *ipsi* d c *parallella ducitur in* l. *Quadratũ igitur* a i *totius* a b *æquatur 48 --- 8 ℞. Huius radix ut inueniatur, sumitur primum dimidium numeri Cossici, 4.* (*Numerus enim Cossicus est 8 ℞.*) *siue recta* a d. *Huius quadratum est 16, siue* k g, *quod adiectum numero absoluto 48 facit 64, siue quadratum* d f, *æquale numero absoluto minus valore radicum, cuius radix quadrata est 8, siue latus* d b: *eritq́ gnomon* g b k, *æqualis numero absoluto una cum valore radicum integro, à quo rursus 4 siue* a d *dimidium radicum, siue quadratum* k g *subtractum relinquit* 4 *siue latus* a b.

Quod autem gnomon g b k *sit æqualis numero absoluto una cum dimidio radicum pretio, sic demonstro.*

1 Syll. 36. primi, *Parallelogramma super æqualibus basibus & inter easdem parallelas constituta, inter se sunt æqualia. Ergo parallelogrammum* d a *est æquale parallelogrammo* e d.

2 Syll. 43. primi. *In omni parallelogrammo supplementa parallelogrãmorum circa diametrum sunt inter se æqualia. Ergo supplementa* d h, h f *sunt inter se æqualia.*

3 Syll. 1. sent. *Quæ uni æqualia, inter se sunt æqualia. Parall.* d l *est æquale parall.* d h : *& eidem est æquale parall.* h f. *Ergo parall.* d l *est æquale parall.* h f.

 4 *Syll.*

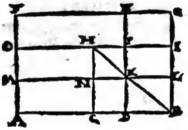
4 Syll. *Si æqualibus æqualia (vel commune) addantur tota erunt æqualia. Aequalibus* d h; h f *additur unum commune* h b. *Ergo gnomon* g b k *est æqualis duobus quadratis* a l *&* a i. *Est autem* a l *valor radicum integer: a i æqualis numero absoluto.*

5 Syll. sententia. *Quadratum additum gnomoni facit integrum quadratum. Ergo addito quadrato* c h *gnomoni* g b k *efficitur totum quadratum* d f: *& per consequens* d b *est latus totius quadrati.*

6 Syll. sententia. *Dato toto & una parte dabitur pars altera per subtractionem. Totum latus est* d b: *siue 8: & 4 siue* d a, *& dimidium numeri radicum est pars una. Ergo per subtractionem altera pars est 4 siue* a b *latus quæsitum. Hæc subtractio est necessaria, propter signum —, quod characteri Cossico additur. Additio autem gnomonis ad quadratum ante facta est, ut totum quadratum complectatur:* ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀπόδειξις Geometrica tertij casus.

Extracturus radicem quadratam ex 12 ℞ — 32, rursus faciat rectam A B, latus quadrati ignotum, quod bifariam secetur in C, & non bifariam in D. Super maiorem partem A D describat quadratum A D E F: & perficiat rectangulum A G. Deinde ex B C dimidio numeri radicum faciat quadratum B C H I, cuius diameter B H secet D E in K puncto, per quod agat ipsi A B parallelam L M secantem C H in N. Producta quoque I H secet A F in O: & D E in P.



Quadra-

Quadratum igitur totius A E æquatur 12 ℞--- 32. Huius radix ut inueniatur sumitur primum dimidium numeri Cosfici 6 (Numerus enim Cosficus est 12 ℞) siue recta C B. Huius quadratum est C I, siue 36: unde subtractum D G, siue gnomon P B N, siue 32 relinquit 4, siue quadratum minus N P. Cuius latus H P siue C D 2, idem vero additur dimidio numeri radicum (nempe 6) facit 8 siue A D latus quadrati A E. Quod autem D G, hoc est, numerus absolutus sit æqualis gnomoni P B N, sic demonstro.

1 Syll. Coroll. 4. lib. 2. *Parallelogramma circa diametrum sunt quadrata. Parallelogramma* d l, n p *sunt circa diametrum. Ergo parallelogramma* d l, n p *sunt quadrata.*

2 Syll. 36. primi. *Parallelogramma super æqualibus basibus & inter easdem parallelas inter se sunt æqualia. Ergo parallelogramma* c l *&* a n *sunt inter se æqualia.*

3 Syll. 43. primi. *In omni parallelogrammo supplementa parallelogrammorum circa diametrum sunt inter se æqualia. Ergo parallelogramma* c k, k i *sunt inter se æqualia.*

4 Syll. 35. definitio. *Quadratum omnia latera habet æqualia. Ergo latera* d b *&* d k *sunt inter se æqualia. Per eandem latera* a d *&* d e *sunt inter se æqualia, quia sunt latera unius rectanguli* a e, *quod ex hypothesi quadratum est.*

5 Syll. sententia. *Quorum latera sunt æqualia, ea sunt inter se æqualia.*

Rectangulorum a k *&* d g *latera sunt inter se æqualia per præcedentem syllogismum. Ergo rectangula* a k *&* d g *sunt inter se æqualia.*

6 Syll. 2. sententia. *Si æqualibus unum commune additum fuerit, tota erunt æqualia. Aequalibus* c k, k i, *additur unum commune* d l. *Ergo* c l, *&* d i *sunt inter se æqualia.*

7 Syll. 1. sententia. *Quæ uni sunt æqualia, inter se sunt æqualia.* A N *æquatur ipsi* c l, *& eidem æquatur* d i. *Ergo &* a n *&* d i *inter se sunt æqualia.*

8 Syll. 2. sententia. *Si æqualibus unum commune addatur, to-*

 ta erunt

ta erunt æqualia. Aequalibus a n, *&* d i, *additur commune* c k. *Ergo gnomon* p b n *est æqualis ipsi* a k.

9 Syll. 1. sententia. *Quæ uni sunt æqualia, ea inter se sunt æqualia. Gnomoni* p b n *æquatur* a k *per præcedentem syll. & eidem* a k *æquatur* d g, *per quintum syll. Ergo* p b n *est æqualis ipsi* d g, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

σχόλιον.

Quoties 1 ʒ æquatur numero radicum posito cum numero absoluto mediante signo ---, tunc semper (uno casu excepto) habebit ipsa æquatio duplicem radicem: alijs vero casibus, non potest fieri, ut una æquatio plures æquationes quàm unam habeat, ut docet Stifelius cap. 4. lib. 3. Exceptionis exemplum est hoc. Sit 1 ʒ æquatus 12 ℞ --- 36. Dimidium numeri radicum est 6, quod in se ductum facit 36, à quibus subtraho 36, numerum absolutum, cui additum signum — & remanet 0. Nihil igitur erit quod vel subtrahatur à dimidio numero radicum, aut ad eum addatur. In hoc casu radix æquationis est dimidium numeri radicum simpliciter. Idem demonstratur in schemate tertij casus, si datur quadratum C I. Rectangulum enim A H numero absoluto aquale est, quo ablato ex C I quadrato dimidij numeri radicum nihil remanet, ut docet Clauius cap. 12. suæ Algebræ. Stifelius autem prædicto capite pulchrè demonstrat per tertiam & quartam secundi.

Posito vero numero absoluto cum signo ✠: duplex radix non occurrit: ut sit æquatio inuenta inter 1 ʒ & 6 ℞ ✠ 72. Dimidium numeri radicum est 3, quod in se ductum facit 9, quibus addita 72 propter signum ✠ procreat 81, quorum radix 9. His adiectum dimidium numeri radicum nempe 3 facit 12, pretium radicis.

Δοκιμασία. 6 ℞ (posita una radice pro 12) valent 72: quibus additis ad 72 fiunt 144: id est, numerus quadratus radicis 12.

ἔκθ. quarti casus *Sit æquatio inter 1 ʒʒ & 18 ʒ* ✠ *648.*

Δ. Oportet *ex dato binomio radicem censicensicam extrahere.*

Κατασ. *Cùm numeri Cossici æquationis habent unum characterem, eumq; maiorem compositum ex* ʒ: *& alium ex numeris exponentibus, qui progressionem Arithmeticam constituunt unam ex his, 4, 2, 0: vel 4, 0, 2. vel 6, 3, 0: vel 6, 0, 3, vel 8, 4, 0: vel 8 0 4: vel 10, 0, 5, &c. extrahenda est prius radix quadrata propter characterem*

rem ℨ, secundum modum priore casu descriptum: deinde ex radice quadrata inuenta siue ea rationalis sit, siue irrationalis, elicienda est radix alia secundum reliquam partem characteris Cossici maioris, qui medius est inter maximum & minimum, hoc modo.

1. Terminorum propositorum exponentes sunt, 4, 2, 0.

2. Radix censica 18 ℨ + 648 est 36. Nam dimidium numeri Cossici est 9, cuius quadratum 81 additum 648 facit 729: ex quo radix 27 addito 9, dimidio numeri facit 36.

3. Ex 36 rursus extracta radix quadrata facit 6: quadrata autem extrahitur ob reliquam partem characteris Cossici, nimirum ℨ qui medium locum obtinet inter ℨℨ & N.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 6 esse radicem censicensicam numeri Cossici propositi 18 ℨ + 648, id est, radicem censicensicam valore 6: aequari autem 18 ℨ + 648 & 1296.*

Ἀπόδειξις. Nam 18 ℨ (valente una radice 6) faciunt 108, quae rursus in 6 ducta procreant 648, quibus addita 648 faciunt 1296.

Σχόλιον. Radix prima non aliter inuenitur, ac si esset aequatio inter 1 ℨ & 18 ℞ + 648. Quod si 2 ℨℨ essent propositi, reducendi illi essent ad simplicem diuidendo per 2, ut in sequenti exemplo. Sunt 2 ℨℨ aequati 1450 — 8 ℨ. Diuisis igitur 1450 — 8 ℨ per 2, erit 1 ℨℨ aequatus 725 — 4 ℨ. Extraho igitur radicem censicam seu quadratam ex 725 — 4 ℨ: facit 25. Deinde quaero radicem quadratam ex 25 facit 5. Et haec est radix aequationis.

Similiter radix 1 ℨ𝒸 aequati 5120 — 16 𝒸 est 4. Radix enim quadrata huius numeri 5120 — 16 𝒸 prius sumitur, eritque 64. Radix autem cubica de 64 est 4. Quod autem radix quadrata sit 64, sic supputato.

Dimidium numeri Cossici est 8: quadratum est 64: 5120 additis fiunt 5184. Radix illorum 72. Dimidio ablato restant 64. Est enim exemplum secundi casus.

Ἐκθ. quinti casus. *Sit numerus compositus irrationalis 8 + √ ℨ 48.*

Δ. Oportet *ex dato numero extrahere radicem quadratam.*

Κατ. *Sume differentiam quadratorum utriusque particulae: huius differen-*

differentiae radicem adde ad maiorem particulam, & ab eadem aufer. Demum à dimidijs duorum productorum educta radices, & per proprium signum connexa, radicem quaesitam ostendent, hoc modo.

1. Quadrata particularum sunt 64 & 48 (Nam ut supra dictũ, multiplicatio quadrata irrationalium nihil aliud est quam characteris multiplicationem indicantis deletio.)

2. Quadratorum differentia est 16, quorum radix 4.

3. 4 addito maiori binomij particula 8 fiunt 12. (8 maius est quàm √ʒ 48. Nam quadratum de 8 est 64: de √ʒ 48, est 48.) Eadem ablata ab 8 relinquunt 4.

4. Dimidia 12 & 4 sunt 6 & 2: quorum radices √ʒ 6, & √ʒ 2.

5. Connecto signo ✠ (Erat enim binomium) fit √ʒ 6 ✠ √ʒ 2.

Repetitio τοῦ διος. *Dico √ʒ 6 ✠ √ʒ 2 esse radicem quaesitam dati binomij.*

Δοκιμασία. Si multiplices in se √ʒ 6 ✠ √ʒ 2 emerget quadratum 8 ✠ √ʒ 48.

Ἀπόδειξις ex quarta & quinta propositione lib. 2. Euclidis peti atque intelligi potest, ut docet Stifelius cap. 10. lib. 2. Est enim hic sensus, ut radice quadrata numeri 6 si haberi posset addita ad √ʒ 2, totius numeri radix quadrata sumatur.

Vt vero res planius percipiatur, sit √ʒ 10 ✠ √ʒ 16 ✠ 3 ✠ √ʒ 64. Hi numeri rationales nihil aliud significant, quam 5. Nam √ʒ 16 est 4, quae addita ad 3 facit 7: & 7 cum √ʒ 64, id est, cum 8 faciunt 15, quibus si adduntur 10 fiunt 25, precium totius numeri cõpositi, cuius radix quadrata est 5.

Eodem modo √ residui 8 — √ 60 est √ʒ 5 — √ʒ 4.

Est ergo residuum √ʒ 5 — √ 3. Nam √ʒ 4 est 2: quae ablata à 5, relinquunt 3. Signum enim — minoris à maiore subtractionem requirit.

χόλιον. Binomium, ut & residuum in se multiplicatum producit binomium quadratum. Nec omnia binomia aut residua, ut nec omnes numeri, sunt quadrata ἁπλῶς. Sic 17 non est quadratus numerus, quamuis eius radix sit √ 17.

Plura

Plura exempla.	Binomia.	Eorum radices.
	$36 + \sqrt{1152}$.	$\sqrt{24} + \sqrt{12}$
	$10 + \sqrt{96}$.	$\sqrt{6} + 2$.
	$22\frac{1}{16} + \sqrt{450}$.	$3\frac{3}{4} + \sqrt{8}$.

EXTRACTIO SECVNDARVM RADICVM.

πρότασις. Ex secundis radicibus radicem quamcunque extrahere.

Duo sunt casus huius extractionis. Radix enim aut vera est, aut non vera, eaq́ vel quadrata, vel cubica, & sic deinceps.

ἐκθ. primi casus. *Sit 25 A ȝ.*

Δ. Oportet *ex hoc numero secundæ radicis radicem quadratam extrahere.*

Κατ. *Ex numero eruitur radix, si habet, eiq́ apponitur litera secundæ radicis reiecto charactere Coßico, hoc modo. 5 A.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 5 A, esse radicē quadratā numeri 25 A ȝ.*

Δοκιμασία. Nam 5 A, in triplari progressione sunt 15 : at ex 15 in 5 fit numerus 225, cui æquales sunt 25 ȝ secundæ radicis.

Simili ratione radix cubica numeri 27 A ȼ est 3 A. Et radix zenzizensica numeri 16 D ȝȝ est 2 D. Nam 3 A sunt 9 : at ex 9 in se cubicè fiunt 729, videlicet 27 ȼ secundæ radicis. Ita quoque numeri 16 D ȝȝ radix zensizensica erit 2 D, quia 2 D sunt 6 : & ex 6 in se zensizensicè fiunt 1296 secundæ radicis.

ἐκθ. secundi casus. *Sit 3 A ȝ.*

Δ. Oportet *ex hoc numero radicem cubicam extrahere.*

Κανών. *Quando numerus non habet radicem quæsitam : vel character Coßicus non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda, illius radix est irrationalis.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico radicem cubicam 3 A ȝ esse √ ȼ 3 A ȝ. Sic radix quadrata numeri 4 A ȼ est √ ȝ 4 A ȝ. Hic utrobiq́ toti numero cum litera & charactere signum radicale præponitur, & fit radix irrationalis.*

σχόλιον.

1. Secundæ radices vocantur numeri abſconditi poſt poſitionem 1 ℞ prius poſitæ ſub incerta proportione occurrentes: ſic dictæ reſpectu primarum. Sequuntur autem non tantum ſecundæ, in ſpecie ſic dictæ; ſed & tertiæ & quartæ, & ſic plures deinceps: quarum diuerſus & valor eſt, & character cauendi erroris gratia. Secundæ enim radices ſic notantur I A: tertiæ ſic, I B: quartæ ſic, I C, & ſic deinceps, in quibus 1 ſignificat unam radicem, ſiue 1 ℞. A ſecundam: B tertiam: C quartam. V.G. Sint duo numeri, quorum quadrata iuncta faciunt 340: duo vero numeri inter ſe multiplicati faciunt ⅝ maioris quadrati. In hoc exemplo ſi pro utroque numero hinc inde ponatur 1 ℞ eiusdem deſignationis, ſimilitudo characterum diuerſis numeris affixorum præberet occaſionem erroribus in operatione. Pro primo igitur numero 1 ℞: pro altero I A, ſiue I A ℞. (In omni enim radice ſecunda ſemper ſignum radicis vel exprimitur, vel latet,) eamque diſtinctam ſtatuere neceſſe eſt.

2. Omnium ſecundarum radicum (ſic in genere appellatarum) eadem eſt ratio in omni ſupputationum genere, id eſt, ſimili modo omnes radices ſecundæ adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, diuiduntur, radices extrahuntur: nec ab aliis ſupputationibus numerorum Coſsicorum differunt,

Additio. Sic additis 3 A ad 4 A fiunt 7 A. Et additis 3 A ad 4 B fiunt 3 A ✠ 4 B. Ibi enim ijdem: hic diuerſi ſunt characteres.

Subtractio. Et 3 A ſubtractis ex 7 A reſtant 4 A. Et ſubtractis 3 A ex 4 B reſtant 4 B — 3 A. Ibi enim ijdem: hic diuerſi ſunt characteres.

Multiplicatio. Et 2 ℞ ductis in 2 A, fiunt 4 ℞ A. Nam reſoluta 2 ℞ faciunt 4, & 2 A faciunt 6: at 4 in 6 faciunt 24: quantum videlicet faciunt 4 ℞, id eſt, 8 ductæ in I A, id eſt, in 3.

Contra 2 A in 2 ℞ ductis fiunt 4 A ℞. Nam 2 A ſunt ſex, & 2 ℞ ſunt 4: fiunt autem 24 ex 6 in 4: quantum nimirum faciunt 4 A, id eſt, 12 in 1 ℞, videlicet in 2.

Vtrobique enim numerus radicis primæ ducitur in numerum radicis ſecundæ.

Ex 6 in 3 C fiunt 18 C, hoc eſt, ex 6 in 9 fiunt 54, hoc eſt, 18 C. Hic numerus abſolutus in numerum ſecundæ radicis ducitur. Oritur igitur numerus ſecundæ radicis.

Ex 3 A in 9 B fiunt 27 A B. Nam 3 A ſunt 9, & 9 B ſunt 27. Fit tamen 243 ex 9 in 27, quantum nimirum fit ex 27 A, id eſt, ex 81, in

81, in 1 B, id est, in 3. Hic numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis diuersæ literæ.

Ex 3 A in 4 A fiunt 12 A ʒ, hoc est, 12 ʒ secundæ radicis. Nam 3 A sunt 9, & 4 A sunt 12. Fiunt autem 108 ex 9 in 12: quantum nimirum faciunt 12 ʒ secundæ radicis. Hic numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis eiusdem literæ.

Ex I A in se quadratè fiunt I A ʒ, hoc est, 1 quadratum secundæ radicis. Et ex 3 B in se quadratè fiunt 9 B ʒ, id est, 9 ʒ secundæ radicis. Nam 3 B sunt 9: at ex 9 in 9 fiunt 81, nimirum 9 ʒ secundæ radicis. Hic numerus secundæ radicis ducitur in se quadratè. Sic 3 B in se cubicè faciunt 27 B ȼ. Producitur igitur character ʒ vel ȼ cum præposita eadem litera.

Ex I A in I A ʒ fit I A ȼ, hoc est, cubus secundæ radicis, nimirum 27. Nam I A, valet 3, & 1 ʒ secundæ radicis 9. Liquet autem ex 3 in 9 gigni 27. Hic primus numerus intelligitur habere etiam signum Cossicum ℞.

Ex 2 ȼ in 4 A ʒ fiunt 8 ȼ A ʒ, hoc est, 8 ȼ multiplicati in I A ʒ, id est, in 1 ʒ secundæ radicis. Nam 2 ȼ sunt 16 & 4 ʒ secundæ radicis 36. Fiunt autem 576 ex 16 in 36, quantum nimirum faciunt 8 ȼ, id est, 64 multiplicati in 1 ʒ secundæ radicis, videlicet in 9. Hic numerus Cossicus simplex absque litera secundæ radicis multiplicatur in numerum signatum litera & signo Cossico. Producto igitur eadem signa apponuntur.

Ex 2 A ʒ in 5 A ȼ fiunt 10 A ß. Nam 2 ʒ secundæ radicis sunt 18: & 5 ȼ secundæ radicis sunt 135. Fiunt autem 2430 ex 18 in 135, quantum scilicet faciunt 10 ß secundæ radicis.

Ex 1 A ȼ in 1 ʒ A fit 1 ʒ A ʒʒ, hoc est, 1 ʒ ductus in 1 ʒʒ secundæ radicis. Nam 1 ȼ secundæ radicis est 27: & 1 ʒ est 4. Fiunt autem 108 ex 27 in 4: & ex 108 in 1 ℞ secundam, id est, in 3 fiunt 324: ac tantundem fit ex 1 ʒ in 1 ʒʒ secundæ radicis, hoc est, ex 4 in 81.

Ex diuisione 8 ȼ A ʒ per 4 A ʒ. quotus est 2 ȼ. Fit enim primum reductio signorum Cossicorum per subtractionem similium signorum: fiuntque 8 ȼ & 4. Sic 8 ȼ A ʒ per 4 ȼ fit quotus 2 A ʒ.

Mm 2 Quod

Quod si numerus ℞ per numerum secundarum radicum diuiditur, quotus est minutia; ut 2 ℞ per 4 A fit $\frac{2\ ℞}{4\ A}$.

In probationibus duorum instrumentorum, multiplicationis & diuisionis progressio duplarum proportionum claritatis gratia adscripta est primis radicibus: & progressio triplarum secundis radicibus, ut patet in subiecto schemate, aucto numeris progressionis quadruplæ, propter radices tertias.

N	℞	ʒ.	ȼ.	ʒʒ.	ß.	ʒȼ.	Bß.	ʒʒʒ.	Cȼ.	ʒß.
I R	2	4	8	16	32	64	128	256	512	024
I A	3	9	27	81	243	729	2187.	6561	19682	59049
I B	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576

3. Inuenta exæquatione radices secundæ mox reducendæ sunt ad radices primas: quarum ubi fuerit exquisitus valor, inde & secundarum & tertiarum valor, ductu indicioque quæstionis facile innotescet; ut apparebit in exemplis.

ARITH-

ARITHMETICÆ PERFECTAE ET DEMONSTRATAE LIBER SEXTVS.

DE NVMERO ASTRONOMICO.

DEFINITIONES.

1. Numerus Aſtronomicus eſt, qui numerat eas res, quæ Aſtronomico calculo ſubiectæ ſunt, ſiue quas Aſtronomia conſiderat.

2. Eſtque triplex: integrum, ſexagena, ſcrupulum. Integrum eſt nomen vulgare, quo ſignificatur res, quæ vel pars eſt, vel non pars alicuius maioris integri.

3. Species integrorum ſunt circulus, ſignum, gradus, annus, menſis, dies, hora, diameter, digitus.

4. Sexagena eſt ſumma quædam multorum integrorum ſic appellata à ſexagenario, quo colligitur ſeu coagmentatur: Græcis ἑξηκοντάς.

5. Species ſexagenæ ſunt prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, & ſic deinceps, nomen ſuum à numero ordinali fœminino ſortitæ.

6. Sexagena prima in ſe 60 integra continet: ſexagena ſecunda 60 primas: ſexagena tertia 60 ſecundas, & ſic de cæteris.

7. Scrupulum eſt pars integri. Græcis λεπτὸν & ἑξηκοστὸν Latinè minutum, & ſexageſimum: ſic appellatum ſimiliter à numero ſexagenario, quo integrum vel pars integri in minutiſſimas quaſque particulas diſtribuitur.

8. Species ſcrupulorum ſunt, primum, ſecundum, tertiũ, quartum, quintum, & ſic deinceps, nomen ſuum à numero ordinali neutri generis ſortitæ.

9. Scrupulum primum eſt ſexageſima pars integri, in

ſexaginta æquales partes diuiſi: ſic dictum quod in eas integrum primò immediatè diuiditur, Græcis ἑξηκοστὸν πρῶτον. Solet autem ſimpliciter vocari ſcrupulum vel minutum.

10. Scrupulum ſecundum eſt ſexageſima pars ſcrupuli primi in ſexaginta particulas æquales diuiſi: ſic dictum, quòd integrum ſecundò in has particulas ſubdiuiditur. Græcis ἑξηκοστὸν δεύτερον. Simplicius & magis explicate ſecundum.

11. Similiter tertium, quartum, quintum, & ſic deinceps, ſcrupulum eſt ſexageſima pars ſingulorum velut integrorum in 60 diuiſorum tertia, quarta, quinta.

σχόλιον.

Synonyma ſunt numerus Aſtronomicus, minutia phyſica, Aſtronomica, philoſophica, fractio Aſtronomica. Sic dicta, diſcriminis cauſa, ut diſtinguatur à uulgari, à qua multis modis differt, imprimis modo ſcribendi. Vulgaris enim minutia duobus numeris, ſuperiore & inferiore, interiecta lineola ſcribitur. Aſtronomica alterū nempe inferiorem, uel omittit, eò quod illum à 60, tanquam communi limite denominari certum eſt: uel loco ſuperiore collocat, neglecta lineola, ſic $\frac{2}{2}$ a. $\frac{5a.}{4}$ duo ſecunda, quatuor quinta.

Subiectum huius numeri, res quæcunq; eſt, quæ ut totum conſideratur: imprimis uero ea, quam Aſtronomia conſiderat: ut ſunt circulus, ſignum, gradus, &c.

Circulus aut eſt Zodiacus, aut æquator, aut quiuis alius. Zodiacus autem primò in ſigna 12: deinde unum ſignum in 30 gradus: tum unus gradus in 60 ſcrupula diuiditur; unde Zodiacus 360 gradibus conſtare dicitur. Hinc nata Aſtronomica hypotheſis, omnem circulum ſiue magnum, ſiue paruum cogitatione in 360 gradus diuidi: qui uero in æquatore, & alijs circulis propriè partes appellantur.

Annum communem Iulianum conſtare diebus 365: biſſextilem diebus 366: omnem uero annum Aegyptium habere dies 365 ſuo loco traditur.

Sic menſes apud Aegyptios ſinguli continent dies 30. Iuliani uerò inæqua-

liter

liter dies 28, 29, 30, 31: quam ob causam Aegyptij anni & menses, cum perpetuò sint æquales, aptißimi sunt ad calculum: Iuliani contrà inepti, nisi præcedat quædam præparatio.

Dies constat horis 24 æquinoctialibus, quarum quælibet in 60 scrupula subdiuiditur.

Apparens diameter Solis & Lunæ in 12 partes, siue digitos eclipticos diuiditur. Vera diameter multo maior est, quàm ut 12 tantum digitos comprehendat.

Quod zodiacus diuidatur in signa 12: signum in 30 gradus, id natura monstrauit. Intra anni enim spacium, quo Sol zodiacum perlustrat, Luna ad solem duodecies reuertitur: & dum luna à sole digressa eundem rursus consequitur, triginta ferè dies elabuntur. Quod uero partes rursum singulæ uelut integra in 60 diuiduntur, id ars constituit. Nam infra centum præter sexagenarium nullus alius uel plures multiplices partes habet, uel per plures numeros exactè diuidi potest. Potest enim exactè diuidi per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Et sic habet semissem, trientem, quadrantem, sextantem, partem quintam, decimam, duodecimam, decimam quintam, uicesimam, tricesimam.

Integrum supra scripto circulo, qui cifram significat, notari solet, quo integrum, non fractum numerum, nec non speciem emergentem designet, sic 59°*. 59 integra. Solet uero & suo exprimi nomine, ut 59 anni, menses, dies.* NOTAE.

Species sexagenarum significantur per notas numerorum addita diphthongo sic

1æ 2æ 3æ
59. 8. 11.

Exprimuntur autem sic 59 primæ, 8 secundæ, 11 tertiæ. Recentiores quidam designant affixis ad uertices numerorum tot oblongis, & uersus dextram inclinatis uirgulis quotam speciem significant, sic. 59`. 8``. 11```.

Species scrupulorum usitatius notantur, tot affixis ad uertices numerorum oblongis, & uersus sinistram inclinatis uirgulis, quotam speciem significant, sic. $59', 8'', 11'''$*. Exprimuntur autem sic. 59 prima, 8 secunda, 11 tertia. Quidam etiam per notas numerorum supra cardinales numeros positas significant operosius, addita litera a sic.*

1a 2a 3a
59. 8. 11.

Multiplices species in scribendo eum ordinem obseruant: ut in medio collocentur integra: uersus dextram species scrupulorum: uersus sinistram species sexagenarum, hoc modo. ORDO.

Sexage-

5ta. 4ta. 3a. 2a. 1a. 0. 1a. 2a. 3a. 4ta. 5ta.

Sexagenæ.	Integrum.	Scrupula.
Siniſtra pars.	Medium.	Dextra pars.

Maiora enim ordine analytico antecedunt, ſequuntur minora.

Numerus maior uel maximus eſt, qui ſub maxima ſpecie maiorem habet numerum. Et rurſus maior eſt, qui in plures ſpecies diſtributus eſt. Et ſpecies ſcrupulorum propiores integro habent maiorem ualorem, remotiores minorem: ut unum primum maius eſt uno ſecundo. Sic unum primum eſt maius, quàm 59 ſecunda, contra ſpecies ſexagenarum propiores integro habent minorem: remotiores maiorem ualorem.

In ſcrupulis ſexageſimis, quidam decima ſcrupula extrema ſtatuunt, quaſi ultra progredi non liceat. Verum ut rarò ad decima uſq; deſcendat calculus, ita aliquando utiliter poteſt decima tranſcendere.

Species numeri Aſtronomici eandem perpetuò ſeruant ſpeciem analogiæ, nempe ſexagecuplam; ut apparet ex Canonio ſequenti.

ORDO SEXAGENARVM.

Vna ſexagena	Decima	integra habet	604661760000000000.
	Nona		10077696000000000.
	Octaua		16761600000000.
	Septima		2799360000000.
	Sexta		46656000000.
	Quinta		777600000.
	Quarta		12960000.
	Tertia		216000.
	Secunda		3600.
	Prima		60.

ORDO

ORDO SCRVPVLORVM.

Vnum scrupulum	Primum	est integri pars una	$\frac{1}{60}$
	Secundum		$\frac{1}{3600}$
	Tertium		$\frac{1}{216000}$
	Quartum		$\frac{1}{12960000}$
	Quintum		$\frac{1}{777600000}$
	Sextum		$\frac{1}{46656000000}$
	Septimum		$\frac{1}{2799360000000}$
	Octauum		$\frac{1}{167961600000000}$
	Nonum		$\frac{1}{10077696000000000}$
	Decimum.		$\frac{1}{604661760000000000}$

Vnum integrũ habet scrupula	Prima	60
	Secunda	3600
	Tertia	216000
	Quarta	12960000
	Quinta	777600000

Vnum scrupulum primum habet scr.	Secunda	60
	Tertia	3600
	Quarta	216000
	Quinta	12960000
	Sexta	777600000

Vnum scrupulum secundum habet scr.	Tertia	60
	Quarta	3600
	Quinta	216000
	Sexta	12960000
	Septima	777600000

Vnum scrupulũ tertium habet scr.	Quarta	60
	Quinta	3600
	Sexta	216000
	Septima	12960000
	Octaua	777600000

Hæc series numerorum, siue progreßio Astronomica nata est ex integro sexagenaria uel partitione, continuè diuiso: uel multiplicatione sibiipsi coagmentato. Quælibet igitur species antecedens proximè sequentem sexages includit.

Porrò integrum tam sæpe in tam paruas particulas Astronomi diuidunt, ut ad rei quæsitæ ueritatem calculo quàm proximè accedant. Pleraq; enim integra, quæ Astronomi considerant, ingentè magnitudinem comprehendunt, quoq; maiora sunt subiecta, eò ulterius progrediendũ est in diuisione, ne minores particulæ neglectæ sensibilem errorem calculi inducant.

Ex quo & id sequitur, progreßionem hanc esse similem progreßioni Algebricæ. Nam unum integrum repræsentat drachmam: una sexagena prima radicem. (Nam 60 integra ordine in lõgum disposita repræsentant unam lineam)

 una

una sexagena secunda quadratum (significat enim radicem, id est, 60 sexies in latum dispositam: unde efficitur 3600) una sexagna tertia cubum.

Sic unum integrum diuisum in sexagenta particulas aequales constituit lineam quandam, cuius partes dicuntur prima scrupula. Huius lineae singulae partes in alias 60 particulas aequales subdiuisae dant 3600 particulas, quae in latum dispositae efficiunt quadrati figuram, cuius quidem singulae partes dicuntur secunda scrupula, & sic deinceps.

Reductio numerorũ huius logisticae varia est. *Mutantur enim aut integra maiora in minora: aut minora in maiora: rursus aut integra in sexagenas: aut sexagenae in integra: & aut scrupula alicuius integri in scrupula alterius integri: aut scrupula Astronomica in uulgarem fractionem: aut uulgaris fractio in scrupula Astronomica.*

Regulae, quae reductiones tres gubernant, praecipue sunt hae. Minores appellationes in maiores mutantur per diuisionem. Contrà maiores appellationes in minores mutantur per multiplicationem.

Maiora igitur integra mutantur in minora integra per multiplicationem ualoris. V. G. 10 dies in horas mutati efficiunt 4 primas horarum. Nam 10 dies multiplicati per 24 horas (Tantus enim est ualor diei) producunt horas 240.

Minora integra, si plura fuerint quàm 60, mutantur in maiora per diuisionem sexagenariam: ut in exemplo priori horae 240 reducuntur ad 4 sexagnas, diuidendo per 60.

Magna aliqua integrorum multitudo mutatur in species sexagenarum, tamdiu diuidendo numeros integros per 60, donec quotus sexagenario minor factus fuerit. Prima enim diuisio dabit sexagenas primas, altera secundas: tertia tertias, & sic deinceps. V. G. Anni Christi 1608 completi faciunt 26 sexagenas primas annorum, & 48 annos. Nam 1608 per 60 diuisa constituunt 27, & remanent 48. Iidem anni resoluti in dies, constituunt dies 587322. Nam 1608 per 365 multiplicata procreant 586920: cui additi dies 402, propter totidem annos bissextiles in proposito numero contentos, superiorem numerum faciunt. Iam dies 587322 per 60 diuisi efficiunt sexagenas primas 9788, & restant dies 42. Deinde 9788 sexagenae primae per 60 diuisae, producunt in quoto 163 secundas, & restant 8 primas. Postremo 163 secundae per 60 diuisae, dant in quoto 2 tertias sexagnas

& reliis

& relinquuntur 43 secundæ. Hinc concludo dies 587322 mutatos in sexagenas facere 2 tertias: 43 secundas, 8 primas, 42 dies. Ex quo apparet numerum Astronomicum, numeri uulgaris esse compendium.

Contra species sexagenarum mutantur in integra per multiplicationem sexagenarium. V. G. in exemplo priori 26 sexagenæ primæ annorum & 48 anni faciunt annos 1608. Nam 26 multiplicata per 60 faciunt 1560, quibus addita 48 constituunt 1608. Sic 2‴. 43″. 8′. dierum & 42 dies faciunt annos 1608. Nam 8 primæ multiplicatæ per 60 sunt dies 480. 43 secundæ multiplicatæ per 3600″ sunt dies 154800: 2 tertiæ sunt 432000: quæ coniuncta, additis diebus 42, constituunt dies 587322. Tot autem dies, additis diebus annorum bissextilium, annos 1608 efficiunt.

Scrupula maioris integri in minora integra, eorumq; scrupula mutantur per regulam proportionum, ponendo in principio 60: in medio ualorem, quo maius integrum minora integra continet; in fine numerum scrupulorum maioris integri. Facta enim operatione quæsitum proueniet, V.G. 6 scr. diei faciunt 2 horas, 24 minuta unius horæ, Nam 60 scr. diei dant 24 horas. Ergo 6 scr. d. 2°. 24′ hor. Sic 2′. 30″ diei efficiunt 1 horam. Nam 60′ diei d. 24. Ergo 2′ 30″ faciunt 1 horam.

Scrupula Astronomica mutantur in uulgarem fractionem, hoc modo. Vnum integrum ordine per sexagenariam multiplicationem, resolue in scrupula speciei propositæ; & summam scrupulorum tanquam denominatorem numero speciei propositæ subscribe. V. G. 20 scr faciunt $\frac{1}{3}$. Nam unum integrum sub specie primorum continet 60: quæ subscribo numero propositæ speciei, nempe 20, & fit fractio $\frac{20}{60}$ siue $\frac{2}{6}$ siue $\frac{1}{3}$. Sic 20‴ in uulgari fractione faciunt $\frac{1}{10800}$. Nam unum integrum dat 60 scr. prima: deinde 60 iterum resoluta in secunda faciunt 3600: tum hæc 3600 reducta ad tertia efficiunt 216000‴, nempe speciem propositam. Numero igitur speciei propositæ uidelicet 20 subscribo 216000, hoc modo $\frac{20}{216000}$: quæ reducta ad minores terminos faciunt $\frac{2}{21600}$ & tandem $\frac{1}{10800}$.

Vulgaris fractio mutatur in scrupula Astronomica similiter per regulam proportionum, ponendo in principio regulæ denominatorem fractionis propositæ; in medio 60: in fine numeratorem fractionis. Quod si post diuisionem aliquid remanet, id per 60 in speciem proximè sequentem resoluendum est: & productum iterum per eundem diuisorem, seu denominatorem fractionis diuidendum est; idq; tam diu: donec uel nihil remaneat, uel tantillum, quod sine

ſenſibili errore negligi poßit. V. G. $\frac{1}{36}$ diei, uel uniuscuiusq; rei efficiunt 1'. 40". Sic enim colloco numeros. 36' d 60'. Ergo 1 d. 1°. 24'. Rurſus 24 per 60 reſoluo in ſecunda, & fiunt 1440": quæ iterum diuido per eundem diuiſorem 36: & exeunt 40" præciſè.

ALIVD $\frac{1}{7}$ facit 8'. 34". 17'''. Remanet autem 1''' quod iure poteſt negligi. Ex quo apparet, interdum uulgarem fractionem, eam ſcilicet cuius partes conſtant ex numeris inter ſe primis propoſitam, quæ in ſcrupula Aſtronomica non ita exactè poteſt mutari, ut non aliquid ſemper reſtet. In hac igitur eò usq; progrediendum eſt, ut reſiduum iure negligi poßit.

ALIVD $\frac{1}{100}$ facit 36". Sic enim diſpono numeros 100. d 60'. Ergo 1. d 36". Hic ducto tertio numero in medium prouenit 60: quod cum per 100 diuidi non poßit, reſoluitur prius per 60 in ſecunda, & exeunt 3600, quæ diuiſa per 100 dant 36", & nihil remanet. Ex quo apparet interdum primam diuiſionem fieri non poſſe. Tum igitur ipſum diuidendum tam ſæpe per 60 in minorem ſpeciem reſoluere oportet, donec poßit fieri diuiſiò.

ADDITIO.

πρότασις. Duos, pluresúe numeros Aſtronomicos tanquam partes in unam ſummam colligere.

ἐκθ. Sint dies, dierum ſexagenæ & ſcrupula, qui annis 1608 completis, menſibus 5, diebus 14, horis 2. ſc. 40, quo tempore hæc ſcripſimus, comprehenduntur.

Δ. Oportet has diſtinctas partes temporis aggregatione colligere.

Κατασκ. Primùm annum menſes, dies, & horæ reducantur ad ſexagenas, integra & ſcrupula per reductionem ſupra traditam, vel per Canonem Tabularum Prutenicarum fol. 7. b. Secundo ſimiles ſpecies collocentur ſub ſimilibus. Tertiò ſinguli eiusdem ſpeciei numeri congerantur, facto initio à dextris: aggregatum tranſuerſim ſubtus lineæ rectæ ductæ iiſdem ſubiiciatur.

Quartò, ſi ſumma ſexagenario æqualis vel maior fuerit: eam diuide per 60, & reſiduum loco ſummæ ſcribe infra lineam: quotum vero adde numeris ſpeciei proximè antecedentis, figuris ſcilicet eius dextris.

Quintò,

Quintò, si acciderit, ut numero alicuius speciei addendorum nihil fuerit subscriptum: transferendus est ille solus infra lineam, & loco summæ sui ordinis scribendus est, hoc modo.

			3ª	2ª	1ª	dies.		
Respondent	*Annis*	1600	2.	42.	20.	6.		
		8	0.	0.	48.	42.		
	Mensibus	5	0.	0.	2.	32.		
	Diebus	14				14.		
	Horis	2					5′.	0″.
							1.	40.
			3ª.	2ª.	1ª.	Dies		
	Aggregatum		2.	43.	11.	28.	6′.	40″.

Repetitio τοῦ δεοφ. *Dico datos numeros Astronomicos in unam summam collectos facere sexagenas dierum, tertias 2: secundas 43: primas 11, dies 28, 6′. & 40″ dierum.*

σχόλιον.

Δοκιμασία eadem est in numero Astronomico, quæ in vulgari, eaq; varia, ut docetur lib. 1. fol. 30. Ex illis modis hic quoque unus est per subtractionem, hoc modo.

			D.		
2ᵐ.	43ⁿ.	11ª.	28.	6′.	40″.
2.	42.	20.	0.		
0.	0.	51.	28.	1′.	40″.
		48	42.	0.	0.
		2.	46.	1′.	40″.
		2.	32.	0.	0.
			14.	1.	40.
			14.	0.	0.
			0.	1.	40.
				1.	40.
			0.	0.	0.

In additione Astronomica integros circulos coaceruatione partium & sexagenarũ confectos excludimus, ac negligimus, eò quod

non inquiramus, quoties eundem circulum stella percutrit, sed quantum absit à certo aliquo circuli puncto.

SVBTRACTIO.

πρότασις. Dato maiore numero Astronomico, & uno minore reliquum minorem inuenire.

ἔκθ. *Sit maior numerus 9, prima, 28 dies, 37′. 46″: minor 7 prima, 34 dies 46′. 55″.*

Δ. Oportet *reliquum minorem inuenire.*

Κατ. *Prima cura debet esse iusta collocationis: ut similes sub similibus: & maior superiore: minor inferiore loco ponatur. Secundo à dextris versus sinistram initio facto similes aufer à similibus: & residuum infra lineam subductam scribe. Tertiò si dextra figura inferiore fuerit maior, quàm dextra figura superior, subtractio fiat mutuando decem, ut in vulgari subtractione. Si vero sinistra figura inferior fuerit maior, quàm sinistra superior, prius superiori sinistrae figurae, si qua est, aut loco sinistro superiori, si nulla adest figura, 6, id est, integer circulus siue gradus 360 addantur, mutuo sumta à praecedenti specie, hoc modo.*

1 ℞	D.		
9.	28.	37′.	46″.
7.	34.	46′.	55″.
1.	53.	50.	51.

Hic sinistrae figurae singulae nō potuerunt auferri à sinistris. Facta igitur mutuatio denarij.

Repetitio τῆς διορ. *Dico 1 sexagenam, 53 dies, 50′. 51″ esse reliquum numerum minorem.*

ALIVD. Indagaturus motum solis simplicem ad annum 600 ante natum Christum, subtraho ab Epocha Christi motum annorum sexcentorum, hoc modo.

	Sex.					
ἐποχὴ Christi.	4.	32°.	29′.	51″.	32‴.	55⁗.
Motus annorum 600.	5.	56.	2.	13.	10.	24.
	Sex.					
Residuum	4.	36.	27.	38.	22.	31.

Hic sinistra figura inferior, maior est: ideoq; superiori sinistra adijcit 6, & fiunt 9. Nam unitas antea subtracta fuit per casum priorem: unde 3 remanserunt.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico motum solis simplicem ad annum sexcentesimum ante natum Christum fuisse sexag. 4, part. 36, scr. 27. secund. 38. tert. 22. quart. 31.*

σχόλιον.

Δοκιμασία hic quoque eadem est, quæ in vulgari subtractione, eaq; que varia, ut docetur primo libro, fol. 36: præcipua est, quæ fit subtractione residui à toto, sic.

	1 x					
Totum	4.	32°.	29′.	51″.	32‴.	55⁗.
Residuum	4.	36.	27.	38.	22.	31.
Data pars.	5.	56.	2.	13.	10.	24.

Causa, cur in subtractione motuum integer circulus assumatur est hæc: quod eo circulo quem stella proximè emensa est, quique in additione subtractus fuit, farcimus atque explemus, quod deficit.

MVLTIPLICATIO.

πρότασις. Vnum numerum Astronomicum in alterum ducere.

Sunt autem tres casus. Aut enim integrum est multiplicans, multiplicandi vero integra, sexagena, scrupula: aut inuicem multiplicantur species, quæ sunt eiusdem generis, ut sexagena in sexagenas, & scrupula in scrupula: aut species diuersorum generum, ut sexagenæ in scrupula: vel scrupula in sexagenas.

ἔκθ. primi casus. *Sit inueniendus motus solis simplex, æqualis spacio anni Aegyptij.*

Δ. Oportet *igitur multiplicare 365 dies, id est, 6 primas sexagenas dierum, 5 dies, in motum solis diurnum.* Κατ.

Kar. 1. Collocetur maior supernè & minor infernè, sic ut ultima species minoris numeri rectà consistat sub ultima specie maioris numeri, siue sint eiusdem, siue diuersi generis.

2. Subducta linea inferior numerus ultimæ speciei ducatur in superiorem ultimæ speciei, & productum infra lineam scribatur.

3. Eodem modo idem inferior numerus ultimæ speciei ducendus est in secundum superiorem, & productum infra lineam scribendũ: & sic porrò progrediendũ, donec inferior numerus ultimæ speciei ductus fuerit in singulos numeros superiores multiplicandi.

4. Quod si multiplicans pluribus figuris constat: illa similiter in singulos numeros multiplicandi ducenda sunt: & tandem omnia producta particularia suis locis, quibus sunt scripta, in unam summam per additionem colligantur: ut fit in vulgari Arithmetica. Singularum specierum producta lineis perpendicularibus si distinguantur, valde concinnum est.

5. Ex ultimis speciebus multiplicandi & multiplicantis supra se inuicem scriptis, quæratur species emergens ultimi numeri in producto infra lineam scripto: cuius ultimi numeri specie inuenta, mox etiam apparebunt ordine species præcedentium numerorum totius producti: ut si qui primus emersit ex multiplicatione, quartorum erit scrupulorum, hinc proximus ad tertia, tertius ab eodem ad secunda, quartus ad prima scrupula, quintus ad partes seu integra pertinebit.

6. Species emergens inuenitur ex his tribus regulis. Integrum speciem numeri non mutat. Species eiusdem generis coniunctione notarum: diuersi generis minoris notæ à maiori subductione speciem emergentem designant. Quas regulas hoc disticho complexus est Edo Hildericus.

Vnius adde notas generis, sed deme duorum,
Producti species sic tibi iusta datur.

Sunt enim in multiplicatione quatuor numeri proportionales,

Produ-

productum multiplicationis multiplicandus, multiplicans, & unitas, siue integrum. Quot igitur interuallis productū distat à multiplicando, tot multiplicans ab unitate.

Prima enim regula etiam sub secunda parte versus continetur. Nam integra & scrupula, vel integra & sexagena sunt diuersa genera, & integrorum nota, quæ est ciphra, subtracta à nota specierum, relinquit eandem notam specierum. Ita fit, ut integra non mutent speciem. Exempli igitur propositi multiplicatio fit hoc modo, ex Canone hexacontadon.

Multiplicādus.		0°.	59'.	8''.	3ta 11.	4ta 22	5ta 16	6ta 11.	7a 15	*Diurnus motus Solis æqualis.*
Multiplicans.								1 a 6.	0 5 dies	*Spacium anni Aegyptij.*
								1	7''''''	
								55	15	
						1	20			
					1	50				
		4	55	40	55					
		4	55	40	56	51	20	56	15	
							1	30		
						1	6			
					1	36				
				2	12					
			1	6						
	5	54	48							
	1a		1a	2a	3a	4ta	5ta	6ta	7a	*Annus motus*
Productum.	5	59°.	44	49	10	28	28	26	15	*Sol.*

Sic multiplicans integris constat, nimirum diebus. Nulla igitur multiplicandi species mutatur. Et quia primus, qui emersit ex mul-

Ἀπόδειξις Geometrica.

Multiplicaturus integra vel in ſeipſa, vel in quamcunque ſpeciem deſcribat duas rectas ad rectos inuicem angulos, A B, B C: & ſit utraque earum integrum unum, ut pars ſeu gradus unus: compleatque quadratum A C: quod ipſum quoque integrum, ut pars una ſeu gradus. Secet autem B C lineam in ſegmenta æqualia 60, ut ſit B D unum primum ſexageſimum, id eſt, ſcrupulum. Tertio ex puncto D agat parallelam D E ipſi B A per 31 prop. 1. Elem.

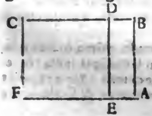
Διορ. primi caſus. *Dico integrum multiplicatum in integrum, & ſcrupula non mutare ſpeciem.*

1 Syll. 1. lib. 6. El. Parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, ut baſes. Hic ſunt duo parallelograma A C D A, quorum eadem altitudo, nempe D E: baſes C B, & D B. Ergo ita ſe habet rectangulum A C ad rectangulum D A, ſicut recta B C ad rectam D B.

2 Syll. ſententia. Datis quatuor terminis proportionalibus, quæ eſt ratio primi ad ſecundum: ea eſt ratio tertij ad quartum. Hic ſunt quatuor termini proportionales. Vt enim ſe habet recta B C ad rectam B D ita rectangulum A C ad rectangulum D A. Atqui recta B C eſt ſexagecupla rectæ D B per hypotheſin & κατασκευὴν. Ergo & rectangulum C A eſt ἑξηκονταπλάσιον rectanguli D A.

3. Sententia. Quæ uni ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia. B C eſt unum integrum: B D eſt unius integri ſcrupulum primum B C ductum in B D procreat D A, rectangulum quod eſt ſexageſima pars unius integri, nempe rectanguli A C.

Ruſus B C integrum ductum in F C integrum procreat rectangulum C A, quod & ipſum integrum eſt. Ergo integrum ductum in ſcrupula gignit eadem ſcrupula: & idem ductum in integrum gignit eadem integra.



Eadem ratione demonſtratur ex ductu integri in ſexagenas primas fieri ſexagenas primas: in ſexagenas ſecundas fieri ſexagenas ſecundas, & ſic deinceps: ſimiliter in ſecunda ſcrupula naſci ſecunda: in tertia naſci tertia, in quarta naſci quarta, & ſic deinceps, id eſt integrum non mutare ſpeciem quod demonſtraſſe oportuit.

Διορ. ſecundi caſus. *Dico ſcrupula inter ſe multiplicata efficere eam ſpeciem, quam coniuncta eorum nota indicant, & primum*

 quidem

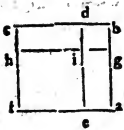
quidem, quod prima ſcrupula in ſemetipſa, id eſt, prima multiplicata, ſecunda conficiant.

Κατ. *Seruetur idem ſchema, quod antea, & in B A abſcindatur B G æqualis ipſi B D: tum per punctum G trahatur G H parallela ipſis B C, & A F: ſitq; linea C B integrum, D B, ſcrupulum primum.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico rectangulum D G eſſe ſcrupulum ſecundum, quod duo prima coniuncta faciunt.*

Ἀπόδειξις. 1 Syll. 1. lib. 6. El. Parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, &c. Hic ſunt duo parallelogramma C G, & D G, quorum eadē altitudo D I, baſes C B, & D B. Ergo ita ſe habet rectāgulum C G ad D G ut recta C B, ad rectam D B. Atqui B C eſt ſexagecuplum ad D B. Ergo & rectangulum C G eſt ſexagecuplum rectanguli D G.

2 Syll. ſententia. Quod eſt ſexagecuplum alterius, illius alterum eſt una ſexageſima. Rectangulum C G eſt ſexagecuplum rectanguli D G. Ergo rectangulum D G eſt una ſexageſima rectanguli C G.



3 Syll. ſententia. Quæ uni conueniunt, illa inter ſe conueniunt. Vna ſexageſima rectanguli C G eſt una ſexageſima unius ſcrupuli primi: & una ſexageſima rectanguli C G eſt rectangulum D G. Ergo rectangulum D G eſt una ſexageſima unius ſcrupuli primi.

4 Syll. Definitio ſcrupuli ſecundi. Vna ſexageſima unius ſcrupuli primi eſt ſcrupulum ſecundum.

Rectangulum D G eſt una ſexageſima unius ſcrupuli primi.

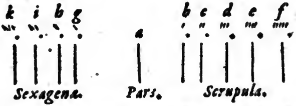
Ergo rectangulum D G eſt ſcrupulum ſecundum, quod demonſtraſſe oportuit.

Eodem modo demonſtratur, quòd ſcrupula prima in ſecunda, tertia: ſecunda in tertia, quinta: & tertia in ſemetipſa ſexta: & ſecunda in quarta, ſexta ſcrupula A C, ſic de cæteris. Sic ſexagenas primas in ſeſe ductas, ſecundas: in ſecundas, tertias, & ſic deinceps per additionem producant.

Διορ. tertij caſus. *Dico ſpecies diuerſorum generum ut ſexagenas multiplicatas in ſcrupula: vel ſcrupula ducta in ſexagenas producere*

ducere eas species, quæ emergunt ex minoris notæ à maiori subductione: & primum quidem, quod sexagenæ primæ ductæ in scrupula prima gignant partes & integra, & contrà scrupula prima in primas sexagenas ducta aream, quam constituunt, complent integris.

Κατ. Collocentur suo loco species, quas rectæ repræsentent lineæ, hoc modo.



Hæc tabula indicat perpetuam & æqualem analogiam specierũ. Ordo sexagenarum sinistram sedem obtinet, qui à medio ascendit crescendo sexagenaris accumulatione in species maiores: dextram obtinens ordo scrupulorum descendit à medio decrescendo partitione continua sexagenaria in species comminutas minores. Sunt igitur tres lineæ G, A, B ἀνάλογοι: ac G est sexagena prima: A integrum seu pars: B scrupulum primum.

Repetitio τῦ διορ. *Dico G, id est, sexagenas primas, ductas in B, id est, scrupula prima producere A, id est, partes seu integra.*

Ἀπόδειξις διὰ δύοῖν.

1 Syll. sententia. Si fuerint tres proportionales, productum primi in tertium est æquale quadrato medij. Hic sunt tres proportionales G, A, B. Ergo orthogonium extremis G & B inclusum æquale est quadrato ad mediam A descripto.

2 Syll. sententia. Quale est productum medij: tale est productum extremorum. Productum medij est integrum. Integrum enim suam non exuit speciem sese multiplicans. Ergo & productum extremorum, id est, orthogonium de extremis confectum itidem partibus seu integris constat, & per consequens, diuisorum generum speciebus inter se multiplicatis nascitur species, quam reliquum de maiore nota post subtractionem minoris relinquit. Nam 1 ab 1 subtractum relinquit o: quod demonstrandum fuit.

Eadem ratione sexagenæ secundæ ductæ in secunda scrupula similiter

 militer

militer integra conficiunt: & in genere omnes species, quæ notarū æqualitate congruunt.

Rursus, quod sexagenæ primæ sui in secunda scrupula multiplicatione prima procreent scrupula, sic demonstro.

Κατασκ. *Ducatur G in C, & producat orthogonium comprehensum integris & scrupulis primis.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico productum constare ex primis scrupulis.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 16. lib. 6. Elem. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Hic sunt 4 rectæ proportionales G, A, B, C. Ergo orthogonium extremis G & C inclusum æquale est orthogonio medijs A & B comprehenso.

2 Syll. sententia. Quale est productum mediorum, tale est productum extremorum. Atqui ex medijs cōformatum orthogonium (quod constat ex integris & scrupulis primis) scrupulis primis constat. Integrum enim ductum in prima scrupula eandem speciem producit. Ergo & productum extremorum è scrupulis primis componitur.

3 Syll. sententia. Quæ uno conueniunt, inter se conueniunt. Productum extremorum è scrupulis primis componitur. Sexagenæ primæ per secunda scrupula multiplicatæ faciunt productum extremorum.

Ergo sexagenæ primæ per secunda scrupula multiplicatæ procreant prima scrupula, *quod demonstrandum fuit.*

Sic de primis sexagenis in scrupula tertia multiplicatis secunda propagantur.

Quod vero sexagenæ tertiæ in prima scrupula multiplicatæ secundas sexagenas proferant, sic demonstro.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 16. lib. 6. Elem. *Datis quatuor rectis proportionalibus productum extremorum est æquale producto intermediorum. Hic sunt 4 rectæ proportionales,* i, h, a, b. *Sicut enim* i *ad* h : *ita* a *ad* b. *Ergo orthogonium quod rectæ* i *&* b, *extrema* ἀνάλογοι *ambiunt, æquale est orthogonio descripto de medijs* h *&* a.

2 Syll. sententia. *Quale est productum mediorum, tale est productum extremorum.*

Atqui

Atqui ex mediјs a *&* h *descriptum orthogonium secundis continetur sexagenis. Integrum enim ductum in sexagenas secundas speciem non mutat.*

Ergo iјsdem & alterum extremis i *&* b, *id est, tertiјs sexagenis & scrupulis primis inclusum continetur: & per consequens, diuersorum generum speciebus inter se multiplicatis nascitur species, subtractione unius ab altera reliqua, retinens genus maioris notæ. Si enim nota scrupulorum fuerit maior: species emergens erit scrupulorum. Sin vero nota sexagenarum erit maior, species emergens erit sexagenarum. In nostro exemplo nota sexagenarum fuit maior: scrupulorum minor. Illa enim fuerunt tertia: hæc prima.*

σχόλιον.

Est & alia explorandi & cognoscendi speciem emergentem ratio, si nimirum sexagenæ resolutæ explicentur in integra: scrupula vero in eas collocentur fractiones, quas supra descriptas in scholio proposuimus: & horum inter se fiat multiplicatio, ut fit in vulgari fractionum Arithmetica. V. G. Si sexagena prima multiplicetur per scrupulum primum unum integrum prouenier. Nam sexagena prima componitur ex 60 integris: scrupulum primum est integri pars sexagesima sic. $\frac{1}{60}$. His inter se multiplicatis proueniunt $\frac{60}{60}$, id est, unum integrum.

Ita si multiplicentur sexagenæ secundæ in scrupula prima, exibunt sexagenæ primæ. Includit enim sexagena secunda integra 3600: scrupulum primum rursus unius integri est $\frac{1}{60}$: quibus inter se multiplicatis prodeunt $\frac{3600}{60}$, quorum valor est 60 integra, quæ sexagenam primam absoluunt.

Contrà de sexagenis primis in scrupula secunda multiplicatis, prima propagantur scrupula. Prima enim sexagena partes habet 60: scrupulum secundum integri est $\frac{1}{3600}$: quibus multiplicatis inter se fiunt $\frac{60}{3600}$, id est, $\frac{1}{60}$, quæ est, scrupulum primum.

Deniq; de scrupulis secundis in tertias sexagenas ductis procedunt sexagenæ primæ. Est enim scrupulum secundum integri $\frac{1}{3600}$. Sexagenæ tertiæ constituunt integra 216000: quibus rursus inter se multiplicatis conficiuntur $\frac{216000}{3600}$, id est, 60 integra, quæ unam sexagenam primam complent.

Multi-

Multiplicatio Astronomica probatur ijsdē modis, quibus vulgaris multiplicatio: quàm optimè verò per diuisionem. Si enim productum diuidatur per multiplicantem, redibit multiplicandus: vel si per multiplicandum, redibit multiplicans, si bene facta fuerit multiplicatio.

DIVISIO.

πρότασις. Vnum numerum Astronomicum per alterum diuidere.

Duo autem sunt casus. Aut enim diuidendus maior est diuidente: aut diuidens est maior diuidendo.

Rursus si diuidendus maior est diuisore: aut integrum diuiditur: diuisores vero sunt integra, sexagena, scrupula: aut inuicem diuiduntur species, quæ sunt eiusdem generis: ut sexagenæ per sexagenas: & scrupula per scrupula: aut species diuersorum generum: ut sexagenæ per scrupula: vel scrupula per sexagenas.

ἐκθ. primi casus. *Sint* $12^{\circ}.\ 54'.\ 54''.$

Δ. Oportet *hos numeros diuidere per 6 sexagenas. Hic diuidendus est maior diuidente.*

Κανών. *1. Singulis numeris diuidendis hac lege versus sinistrā singuli numeri diuidentes sunt subijciendi, ut inferiores in superioribus vel semel vel sæpius contineantur, siue sint eiusdem siue diuersi generis.*

2. Numeris rite collocatis, species diuidendæ à diuidentibus distinguantur medijs duabus parallelis lineis: & certum spacium pro scriptione quoti deligatur vel versus dextram vel versus sinistram diuidendi cum signo semicirculi vel perpendicularis descendentis, iuxta quam singuli numeri quoti descendant.

3. Quæratur quoties numerus maximæ speciei diuisoris contineatur in numero supra scripto. Est autem numerus supra scriptus vel unus vel duo. Si unus, is coniectatur sine canone: sin duo, ex Canone hexacantadon.

4. Quotus inuentus apud semicirculum vel lineam quoti scribatur, cum

tur, cum nota ſpeciei emergentis, cuius inuentionem Edo Hulderi-cus uno hoc diſticho complexus eſt.

Quanto ſectus erit maiorùe minorùe ſecante,
Eſt tanto quotiens integritate ſua.

id eſt, ſpecies, quæ exiſtit è diuiſione, tantum recedit ab integro, quantum ſecta, id eſt, diuidenda abeſt à ſecante, id eſt, diuidente. Nam ſicut in multiplicatione: ita & in diuiſione quatuor exiſtunt numeri proportionales, nempe ut diuidendus ad diuiſorem, ſic quotus numerus ad unitatem velut integrum. Sit igitur rurſum in conſpectu Canonion illud, quod ſupra in ſcholio poſuimus.

$4^{\underline{tx}}$.	$3^{\underline{x}}$.	$2^{\underline{x}}$.	$1^{\underline{x}}$.	0.	$1^{\underline{a}}$.	$2^{\underline{a}}$.	$3^{\underline{a}}$.	$4^{\underline{a}}$.
Quartæ,	*tertiæ,*	*ſecundæ,*	*primæ.*	*Integrum.*	*Prima,*	*ſec.*	*tert.*	*quart.*

SEXAGENAE *SCRVPVLA.*

Hic ſiniſtra ſpecies ſemper dextrâ maior: ut ſexagenæ ſunt maiores integris: integra ſcrupulis: & ſecundæ ſexagenæ maiores quàm una ſexagena, & ſic de aliis. Quanto autem interuallo ſpecies eiusdem generis ſit alia maior vel minor, id inuenitur ſubtractione notarum: diuerſi vero generis additione earundem: ut quartæ ſunt maiores quàm ſecundæ duobus interuallis (hic ſubtrahimus) & quartæ ſunt maiores quàm ſecunda ſex interuallis: (hic addimus) & quartæ ſunt maiores quàm integra quatuor interuallis: quia ciſra in diuerſis generibus nihil addit. In quærendo igitur interuallo ſpecierum faciendum contrarium verſus multiplicationis. Vnius adde notas generis, ſed deme duorũ. *Quod ſi ſectus non eſt maior minorùe ſecante, ſed æqualis, & eiusdẽ generis: quotus eſt æqualis integris. Si igitur prima, diuidantur per prima quotus eſt integra: ſi ſecunda per prima exeunt prima (ſubtractione, quia eiusdem generis, & prima diſtant ab integro, uno interuallo: ergo quotus minor eſt integris uno interuallo.) Si prima per ſecunda, proueniunt prima ſubtractione, quia eiusdem generis, & prima diſtant à ſecundis uno*

interuallo : estq́ diuidendus maior diuisore. Ergo quotus maior integro uno interuallo, & pertinet ad primas, & sic deinceps, ut apparet in sequenti tabella.

Diuidendus	1'	1"	1'	1`	1`	1``	1`	1'	1``	0	1'	0	0	1'	0	*Diuidendus.*
Diuisor	1'	1'	1"	1`	1``	1`	1'	1`	1'	1'	0	1"	1`	0	1"	*Quotus.*
Species emergens quoti.	0	1'	1`	0	1'	1`	1``	1"	1```	1`	1'	1``	1'	1`	1'	*Diuisor.*

Cognita autem specie primi numeri in quoto, si deinceps plures in diuidendo numeri succedunt, hinc postea cæteræ species omnium quoti numerorum ordine supra tradito innotescent : ut illos aliter inuenire non oporteat.

5. Quotus mediante Canone seorsim in singulos numeros diuisoris ducatur, Secundum præcepta multiplicationis : & producta, ut fieri oportet, subscribantur & in unam summam colligantur.

6. Horum productorum summa à numeris diuidendi suprascriptis auferatur, secundum præcepta subtractionis : & residua supra diuidendum notentur.

7. Hæc operatio deinceps promoto toto diuisore uno interuallo longius versus dextram, tam sæpe iteranda est, donec vel nihil remanserit, vel tam parum, ut iure negligi possit.

8. Quod si acciderit, ut diuisor translatus ne semel quidem in suprascriptis numeris contineatur, ponenda est cifra apud lineam quoti, atq; ita illa operatio peracta est, & noua translatione diuisoris utendum.

Secundũ hæc igitur præcepta diuisio exempli supra positi est hæc.

$$\begin{matrix} \not{1}\not{2}^{\circ} & 54' & 54'' \\ 6 & 6' & 6` \\ \not{1}\not{2} & & \end{matrix} \left(2'.\ 9''.\ 9'''. \right.$$

Repetitio τῆς διαιρ. *Dico expartitione 12°. 54'. 54''. per 6 sexagenas,*

genas, quotum acquirere 2'. 9". 9"', id eſt, de diuiſione integri per ſexagenas ſcrupula naſci.

Ἀπόδειξις.

Qui ſuperius tradita de ſpecie emergente in multiplicatione percepit, is iam expoſita de ſpecie emergente in diuiſione intelliget & aſſequetur facilimè. Vt enim multiplicatio è data longitudine & latitudine eruit aream: ſic diuiſio è data area & uno latere profert alterum latus. Deſcribatur itaque parallelogrammum A B C D, in



quo diuidendus ſit area, ad conſtans 12 integris: diuiſor ſiue latus unum ſit A B, conſtans 6 ſexagenis. Iam areâ A D ad rectam A B accommodatâ ſit et A C alterum circa rectum angulum latus, ſcrupulorum duorum: id eſt, è diuiſione integrorum per ſexagenas fiunt ſcrupula, idque ſic demonſtro.

Sententia. Quale productum & duo numeri in multiplicatione: talis eſt diuidendus, diuiſor & quotus in diuiſione.

Atqui productum & duo numeri in multiplicatione ſunt 12°. 6'. 2'. Nam ſcrupula prima per primas ſexagenas multiplicata aream, quam conſtituunt, complent integris, per demonſtrationem tertij caſus multiplicationis.

Ergo & diuidendus, diuiſor & quotus ſunt 12°. 6'. 2'. id eſt, de diuiſione integri per ſexagenas ſcrupula naſcuntur, quod demonſtrandum fuit.

Eodem modo demonſtratur è ſexagenis primis diuiſis per ſcrupula prima, fieri integra, & alterutra ſpecie diſpertita per integrum ſemper naſci eandem cum diuidenda. Sic eiuſdem generis ac ſimilium ſpecierum una diſpertita in alteram egredi integra: & de partitione inter ſe ſpecierum diſsimilium eiuſdem generis erui ſpeciem, quam deſignat id, quod relinquitur minore nota ex maiore ſubtracta: & eam genus non mutare, ſi nota diuidendæ ſpeciei maior ſit: & ſic de cæteris caſibus.

ἐκθ. ſecundi caſus. *Sint 4 ſexagenæ primæ.*

Δ. Oportet *4' partiri in 16". Hic diuiſor eſt maior diuidendo.*

Κατ. *Cum diuiſor ſuperat ſpeciem diuidendam, promoue diuiſorem vel reipſa vel imaginatione ſub ſpeciem ſequentem, ſiue expreſſa illa ſit, ſiue repreſentetur cifrâ, & ea quidem aut notata aut imaginatione aſſumta: ſic. Cum 4 ſex. diuidi non poſſint per 16 ſcr.*

apponatur tacitè ad 4 sex. loco speciei sequentis, quæ integrorum est, o, fiatq́; 4 sex. o cifra partitio in 16 scr. Iam diuisione facta adipiscetur species quota ex Canone hexacontadon 15: quibus sexagenas secundas attribuo, secundum versum. Quanto sectus erit maiorúe minorúe secante, Est tanto quotiens integritate sua.

Sunt enim 16'' in diuisione collocata sub o, siue integro, quod maius est secundis scrupulis, duobus interuallis: unde & species quoti emergens totidem interuallis integro maior est, & sexagenas secundas obtinet: id quod & tabella superior indicat. Quod si 16'' sub sexagenis primis collocentur: tum distaret diuidendus à diuisore tribus interuallis: & species emergens totidem interuallis ab integro distans tertias sexagenas obtineret.

Repetitio τῦ διοϱ. *Dico 4 sex. distributis in 16'' emergere 15 sexagenas secundas.*

Diuisio sine Canone hexacontadon est prolixior, eaq́; vulgaris, ex productis nouem digitorum & denariorum quinq́;, nempe 10, 20, 30, 40, 50, hoc modo.

Supra in exemplo compositæ multiplicationis o. 59'. 8''. 11'''. 22''''. 16'''''. 11''''''. 15'''''''. multiplicata per 61ᵡ 5° fecerunt productum 5ᵡ. 59°. 44'. 49''. 10'''. 28''''. 28'''''. 26''''''. 15'''''''. Hoc igitur productũ probandæ multiplicationis causa iterum per multiplicantem diuidemus, ut multiplicandum recipiamus. Formula diuisionis est hæc.

Diui-

			1		1		1			
	12		49	2	15	31	8	31		
Diuidendum	5	59.	44	49.	10.	28.	28	26.	15.	Quotus.
Diuisor.		6	5.							
Productum primi quoti.	5	58.	58.							59'
Diuisor.			6.	5						8''.
Productum secundi.			48	40						
Diuisor.				6	5					11'''
Productum tertij			1	6	55					
Diuisor.					6.	5				22''''
Productum quarti.				2	13	50				
Diuisor.						6	5			16'''''
Productum quinti.					1	37	20			
Diuisor.							6	5		11''''''
Productum sexti.						1	6	55		
Diuisor.								6	5	15'''''''
Productum septimi quoti.							1	31	15	

rum totius radicis, sicut in multiplicatione & diuisione fiebat. In his enim omnibus species emergens tantum semel inquiritur. Quod si offeratur numerus impar, is reducitur ad parem, adiungendo sequentem numerum, ut in supra dato exemplo, radix 15 scr. primorum est 30 primorum. Additur enim 15 scr. primis sequens species, nempe $0''$, qui numerus est par: cuius dimidium sunt prima. Sic $4'$ dant speciem emergentem $0''$: 2^{x} dant speciem emergentem 1^{as}: 4^{ix} habent speciem emergentem 2^{as}: prima autem habent speciem emergentem integra, quia primis adiungitur 0, siue integrum, hoc modo, 16^{ix}. 0^{o}. vel 16^{ix}. 16^{o}.

ιϰϑ. secundi casus. *Proponatur 1 gr. $10'$, $46''$, $41'''$, $40''''$.*

Δ. Oportet *ex dato numero elicere latus tetragonicum.*

Κατ. 1. *Inuenta simplici radice, per præceptum primi casus, illius quadratum, ex Canone sumtū, vel sine Canone repertum, auferatur siue ab uno, siue à duobus numeris, & residua supra scribantur.*

2. Quæratur diuisor duplando, quicquid est post lineam radicis; productum erit, diuisor, ita subscribendus dato numero, ut dexter eius numerus ponatur sub specie impari proximè sequente speciem sinistram, à cuius numero ante facta est subtractio: sinister vero numerus uno loco remotius versus sinistram.

3. Quæritur quotus ex Canone, quoties diuisor in supra scriptis numeris contineatur: isq; bis scribitur, semel post lineam radicis, & semel apud diuisorem versus dextram diuisoris sub specie pari proximè sequente diuisorem. In cæteris idem processus retinetur, qui in vulgiri extractione radicis obseruatur: ut in dato exemplo apparet, cuius supputatio sequitur.

Diuisor

```
           21
      1°. 10. 46. 41. 40. ( 1°. 5'. 10".
      1
Diuisor ——— 2 — 5 Quotus bis scriptus.
                 5
       ——————————————————————
          10  25
Diuisor ———————— 2.   10.   10.   Quotus bis
                              10   scriptus.
         ——————————————————————————
                 1    1    40
                 20   40
    ———————————————————————————————
   Productum     21.  41.  40.
```

Radix de 1 est 1 gr. qui in se multiplicatus & subtractus relinquit 0.

Duplum unitatis est 2, nouus diuisor, quæ in 10 quinquies continentur. Est igitur altera radix, 5: quæ in 5 & 2 multiplicata faciunt 10. 25: subtracta vero eadem à 10. 46, superioribus relinquũt 0, 21. Rursus iam inuenta radix 1°. 5' duplata sunt 2. 10, nouus diuisor: ex quibus 2 in 21, continetur decies, & tertia radix fit 10: quæ in 10. 10, 2 multiplicata faciunt 21, 41, 40: subtracta vero eadem à superioribus 21, 41, 40, nihil relinquunt.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico latus tetragonicum de proposito numero exquisitè esse 1°. 5'. 10".*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ in numeris vulgaribus: eaque vel Geometrica ex quarta propositione secundi elementorum Euclidis, vel Arithmetica ex theoremate Arithmetico.

κατασκευὴ operationis sine Canone est hæc.

Primò elige aliquam speciem minimam, in qua ex dato numero velis habere radicem: ita ut aliæ species specie electa minores sine sensibili errore negligi possint, siue datus numerus sit verè quadratus, quod rarò accidit, siue surdus, quod plerunque contingit.

Deinde per multiplicationem sexagenariam datum numerum, ex quo radix extrahenda est, resolue in eam speciem, cuius nota est duplo maior, quàm nota electæ speciei. V. G. Si elegeris secunda, resolue propositum numerum in quarta. Quia quarta sunt duplo

maiora quàm secunda. Quod si electa species habuerit notam integrorum, etiam datus numerus in integra resoluendus erit.

Tertiò ex numero sic resoluto prorsus vulgari ratione extrahe radicem quadratam, quæ inuenta illius erit speciei, quam initio elegisti.

Postremò si radix inuenta maior quàm 60 fuerit, eam diuisione sexagenaria mutabis in species maiores, eo quo supra dictum est, modo. V. G. in superiori exemplo minima species inquirendæ radicis, quam elegerim, sit 2a seu secundorum scrupulorum. Datum igitur numerum oportet resolui in quarta scrupula. Ex quartis enim scrupulis species secundorum scrupulorum emergit. Numerus igitur datus 1ª 10′. 46″. 41‴. 40⁗. resolutus in quarta scrupula efficit 16288⁗060: ex quibus radix vulgari ratione extracta continet 3910. Cumque post extractionem radicis de resoluto numero nihil remaneat, signum est, datum numerum verè fuisse quadratum.

Postremò radix quadrata inuenta 3910 diuisione sexagenaria ad maiores species reducta producit 1ª 5′. 10″. Tanta est radix quæsita, eaque inuenta tum ex Canone, tum sine Canone.

ἐκθ. tertij casus. *Sit numerus non verè quadratus 2ª.*

Δ. Oportet *ex dato numero elicere radicem quadratam.*

Κατασκ. *Idem est modus extractionis, qui antea: integro autem addantur plura scrupula, prima, secunda, tertia, quarta, cifris notata, quæ quarto interpunguntur, hoc modo, 2ª 0′. 0″ 0‴ 0⁗. Sic igitur fit extractio. Radix de 2 est 1, quæ subtracta à 2, relinquit 1. 0. Diuisor nouus est 2, qui continetur in 1ª 0′. vicies quater. Iam 24 ducta in se & 2 faciunt 57′. 36″, quæ subtracta ab 1ª 0′, relinquunt 2′. 24″. Rursus diuisor nouus est 2, 48, qui in 2. 24. 0 continetur 51. scrupula quæ supersunt, sine sensibili errore negligi possunt: possunt autem diuidi in infinitum.*

Diuisor

1 2 24 28 49 | 0
2. 0. 0. 0. 0. | 1
1 | 24′
Diuisor nouus 2 24 | 51″
24
———
9 36
48
———
57 36
Diuisor nouus ——— 2. 48. 51
51
———
43. 21
40. 48
1 42.
———
2 23. 51. 21.

Repetitio τῆς δοκ. *Dico radicem quadratam de numero proposito esse* $1^{\circ}.24'.51.$

Hæc radix est veræ propior, quàm quæ vulgari ratione inuenitur: secundum quam √2 est $1\frac{1}{2}$, eaque maior verâ: vel $1\frac{1}{3}$ minor vera. Nam $1^{\circ}\ 24'$ facit in fractionibus $1\frac{2}{5}$. Sunt autem $1\frac{2}{5}$ minus quàm $1\frac{1}{2}$ una particula decima: & idem $1\frac{2}{5}$ maius quàm $1\frac{1}{3}$ una particula decima quinta. Pro media igitur inter utranque, eaque veræ bene proxima statui potest.

Medium enim Arithmeticum, ut docetur supra fol. 126, est $1\frac{5}{12}$ siue $\frac{17}{12}$ hoc modo. $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, quæ sunt extrema, quæ reductis prius ad eosdem denominatores duabus fractionibus, unde fient $\frac{9}{6}$ & $\frac{8}{6}$ addita faciunt $\frac{17}{6}$, quæ diuisa per 2 constituunt $\frac{17}{12}$, siue $1\frac{5}{12}$. Iam $1\frac{1}{2}$ siue $\frac{18}{12}$ maius est quàm $\frac{17}{12}$, una particula duodecima: $1\frac{1}{3}$ siue $\frac{16}{12}$ minor quàm $\frac{17}{12}$ una particula duodecima.

Δοκιμασία eadem est, quæ in vulgari Arithmetica. Radix enim inuenta in seipsam ducta adiunctis residuis, si qua fuerint, datum numerum omnino restituet. Vel datus numerus diuisus per radicem inuentam, eandem radicem restituet, remanentibus iisdem residuis, si qua fuerint, quæ antea de numero dato remanserant.

militer integra conficiunt: & in genere omnes species, quæ notarũ æqualitate congruunt.

Rursus, quod sexagenæ primæ sui in secunda scrupula multiplicatione prima procreent scrupula, sic demonstro.

Κατασκ. *Ducatur G in C, & producat orthogonium comprehensum integris & scrupulis primis.*

Repetitio τοῦ διορ. *Dico productum constare ex primis scrupulis.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 16. lib. 6. Elem. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. *Hic* sunt 4 rectæ proportionales G, A, B, C. Ergo orthogonium extremis G & C inclusum æquale est orthogonio medijs A & B comprehenso.

2 Syll. sententia. Quale est productum mediorum, tale est productum extremorum. Atqui ex medijs cõformatum orthogonium (quod constat ex integris & scrupulis primis) scrupulis primis constat. Integrum enim ductum in prima scrupula eandem speciem producit. Ergo & productum extremorum è scrupulis primis componitur.

3 Syll. sententia. Quæ uno conueniunt, inter se conueniunt. Productum extremorum è scrupulis primis componitur. Sexagenæ primæ per secunda scrupula multiplicatæ faciunt productum extremorum.

Ergo sexagenæ primæ per secunda scrupula multiplicatæ procreant prima scrupula, *quod demonstrandum fuit.*

Sic de primis sexagenis in scrupula tertia multiplicatis secunda propagantur.

Quod vero sexagenæ tertiæ in prima scrupula multiplicatæ secundas sexagenas proferant, sic demonstro.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 16. lib. 6. Elem. *Datis quatuor rectis proportionalibus productum extremorum est æquale producto intermediorum. Hic sunt 4 rectæ proportionales,* i, h, a, b. *Sicut enim* i *ad* h : *ita* a *ad* b. *Ergo orthogonium quod rectæ* i *&* b, *extrema* ἀνάλογοι *ambiunt, æquale est orthogonio descripto de medijs* h *&* a.

2 Syll. sententia. *Quale est productum mediorum, tale est productum extremorum.*

Atqui

Atqui ex medijs a *&* b *descriptum orthogonium secundis continetur sexagenis. Integrum enim ductum in sexagenas secundas speciem non mutat.*

Ergo ijsdem & alterum extremis i *&* b, *id est, tertijs sexagenis & scrupulis primis inclusum continetur: & per consequens, diuersorum generum speciebus inter se multiplicatis nascitur species, subtractione unius ab altera reliqua, retinens genus maioris notæ. Si enim nota scrupulorum fuerit maior: species emergens erit scrupulorum. Sin vero nota sexagenarum erit maior, species emergens erit sexagenarum. In nostro exemplo nota sexagenarum fuit maior: scrupulorum minor. Illa enim fuerunt tertia: hæc prima.*

σχόλιον.

Est & alia explorandi & cognoscendi speciem emergentem ratio, si nimirum sexagenæ resolutæ explicentur in integra: scrupula vero in eas collocentur fractiones, quas supra descriptas in scholio proposuimus: & horum inter se fiat multiplicatio, ut fit in vulgari fractionum Arithmeticâ. V. G. Si sexagena prima multiplicetur per scrupulum primum unum integrum proueniet. Nam sexagena prima componitur ex 60 integris: scrupulum primum est integri pars sexagesima sic. $\frac{1}{60}$. His inter se multiplicatis proueniunt $\frac{60}{60}$, id est, unum integrum.

Ita si multiplicentur sexagenæ secundæ in scrupula prima, exibunt sexagenæ primæ. Includit enim sexagena secunda integra 3600: scrupulum primum rursus unius integri est $\frac{1}{60}$: quibus inter se multiplicatis prodeunt $\frac{3600}{60}$, quorum valor est 60 integra, quæ sexagenam primam absoluunt.

Contrà de sexagenis primis in scrupula secunda multiplicatis, prima propagantur scrupula. Prima enim sexagena partes habet 60: scrupulum secundum integri est $\frac{1}{3600}$: quibus multiplicatis inter se fiunt $\frac{60}{3600}$, id est, $\frac{1}{60}$, quæ est, scrupulum primum.

Deniq; de scrupulis secundis in tertias sexagenas ductis procedunt sexagenæ primæ. Est enim scrupulum secundum integri $\frac{1}{3600}$. Sexagenæ tertiæ constituunt integra 216000: quibus rursus inter se multiplicatis conficiuntur $\frac{216000}{3600}$, id est, 60 integra, quæ unam sexagenam primam complent.

Multi-

tur, cum nota speciei emergentis, cuius inuentionem Edo Huldericus uno hoc disticho complexus est.

Quanto sectus erit maiorúe minorúe secante,
Est tanto quotiens integritate sua.

id est, species, qua existit è diuisione, tantum recedit ab integro, quantum secta, id est, diuidenda abest à secante, id est, diuidente. Nam sicut in multiplicatione: ita & in diuisione quatuor existunt numeri proportionales, nempe ut diuidendus ad diuisorem, sic quotus numerus ad unitatem velut integrum. Sit igitur rursum in conspectu Canonion illud, quod supra in scholio posuimus.

$4^{\underline{tx}}$.	$3^{\underline{x}}$.	$2^{\underline{x}}$.	$1^{\underline{x}}$.	0.	$1^{\underline{a}}$.	$2^{\underline{a}}$.	$3^{\underline{a}}$.	$4^{\underline{a}}$.
Quarta,	*tertia,*	*secunda,*	*prima.*	*Integrum.*	*Prima,*	*sec.*	*tert.*	*quart.*

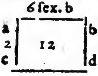
SEXAGENAE *SCRVPVLA.*

Hic sinistra species semper dextrâ maior: ut sexagena sunt maiores integris: integra scrupulis: & secunda sexagena maiores quàm una sexagena, & sic de alijs. Quanto autem interuallo species eiusdem generis sit alia maior vel minor, id inuenitur subtractione notarum: diuersi vero generis additione earundem: ut quarta sunt maiores quàm secunda duobus interuallis (hic subtrahimus) & quarta sunt maiores quàm secunda sex interuallis: (hic addimus) & quarta sunt maiores quàm integra quatuor interuallis: quia cifra in diuersis generibus nihil addit. In quaerendo igitur interuallo specierum faciendum contrarium versui multiplicationis. Vnius adde notas generis, sed deme duorũ. *Quod si sectus non est maior minorúe secante, sed aequalis, & eiusdẽ generis: quotus est aequalis integris. Si igitur prima, diuidantur per prima quotus est integra: si secunda per prima exeunt prima (subtractione, quia eiusdem generis, & prima distant ab integro, uno interuallo: ergo quotus minor est integris uno interuallo.) Si prima per secunda, proueniunt prima subtractione, quia eiusdem generis, & prima distant à secundis uno*

genas, quotum acquirere 2'. 9". 9"', id est, de diuisione integri per sexagenas scrupula nasci.

'Απόδειξις.

Qui superius tradita de specie emergente in multiplicatione percepit, is iam exposita de specie emergente in diuisione intelliget & assequetur facilimè. Vt enim multiplicatio è data longitudine & latitudine eruit aream: sic diuisio è data area & uno latere profert alterum latus. Describatur itaque parallelogrammum A B C D, in



quo diuidendus sit area, ad constans 12 integris: diuisor siue latus unum sit A B, constans 6 sexagenis. Iam areâ A D ad rectam A B accommodatâ fiet A C alterum circa rectum angulum latus, scrupulorum duorum: id est, è diuisione integrorum per sexagenas fiunt scrupula, idque sic demonstro.

Sententia. Quale productum & duo numeri in multiplicatione: talis est diuidendus, diuisor & quotus in diuisione.

Atqui productum & duo numeri in multiplicatione sunt 12° 6'. 2'. Nam scrupula prima per primas sexagenas multiplicata aream, quam constituunt, complent integris, per demonstrationem tertij casus multiplicationis.

Ergo & diuidendus, diuisor & quotus sunt 12° 6'. 2'. id est, de diuisione integri per sexagenas scrupula nascuntur, quod demonstrandum fuit.

Eodem modo demonstratur è sexagenis primis diuisis per scrupula prima, fieri integra, & alterutra specie dispertita per integrum semper nasci eandem cum diuidenda. Sic eiusdem generis ac similium specierum una dispertita in alteram egredi integra: & de partitione inter se specierum dissimilium eiusdem generis erui speciem, quam designat id, quod relinquitur minore nota ex maiore subtracta: & eam genus non mutare, si nota diuidendæ speciei maior sit: & sic de cæteris casibus.

Ἐκθ. secundi casus. *Sint 4 sexagenæ primæ.*

Δ. Oportet *4' partiri in 16". Hic diuisor est maior diuidendo.*

Κατ. *Cum diuisor superat speciem diuidendam, promoue diuisorem vel reipsa vel imaginatione sub speciem sequentem, siue expressa illa sit, siue representetur cifrâ, & ea quidem aut notata aut imaginatione assumta: sic. Cum 4 sex. diuidi non possint per 16 scr.*

apponatur tacitè ad 4 sex. loco speciei sequentis, quæ integrorum est, 0, fiatq́; 4 sex. 0 cifra partitio in 16 scr. Iam diuisione facta adipiscetur species quota ex Canone hexacontadon 15: quibus sexagenas secundas attribuo, secundum versum. Quanto sectus erit maiorúe minorúe secante, Est tanto quotiens integritate sua.

Sunt enim 16'' in diuisione collocata sub 0, siue integro, quod maius est secundis scrupulis, duobus interuallis: unde & species quoti emergens totidem interuallis integro maior est, & sexagenas secundas obtinet: id quod & tabella superior indicat. Quod si 16'' sub sexagenis primis collocentur: tum distaret diuidendus à diuisore tribus interuallis: & species emergens totidem interuallis ab integro distans tertias sexagenas obtineret.

Repetitio τῆ διορ. *Dico 4 sex. distributis in 16'' emergere 15 sexagenas secundas.*

Diuisio sine Canone hexacontadon est prolixior, eaq́; vulgaris, ex productis nouem digitorum & denariorum quinq́;, nempe 10, 20, 30, 40, 50, hoc modo.

Supra in exemplo compositæ multiplicationis $0.\ 59'.8''.11'''.22''''.16'''''.11''''''.15'''''''$*. multiplicata per* $61^{\underline{x}}\ 5^{\underline{o}}$ *fecerunt productum* $5^{\underline{x}}.\ 59^{o}.44'.49''.10'''.28''''.28'''''.26''''''.15'''''''$*. Hoc igitur productū probandæ multiplicationis causa iterum per multiplicantem diuidemus, ut multiplicandum recipiamus. Formula diuisionis est hæc.*

Diui-

			1		1		1			
	12		49	2	15	31	8	31		
Diuidendum	5	59	44	49	10	28	28	26	15	Quotus.
Diuisor.		6	5							
Productum primi quoti.	5	58	58							59'
Diuisor.			6	5						8''.
Productum secundi.			48	40						
Diuisor.				6	5					11'''
Productum tertij			1	6	55					
Diuisor.					6	5				22''''
Productum quarti.				2	13	50				
Diuisor.						6	5			16
Productum quinti.					1	37	20			
Diuisor.							6	5		11
Productum sexti.						1	6	55		
Diuisor.								6	5	15
Productum septimi quoti.							1	31	15	

TABELLA PRODVCTORVM.

1		Diuiſor 6	5
2		12	10
3		18	15
4		24	20
5		30	25
6		36	30
7		42	35
8		58	40
9		54	45
10	1	0	50
20	2	1	40
30	3	2	30
40	4	3	20
50	5	4	10

Producta numerorum ſunt ſupputata ex appoſita tabella, in qua diuiſor primo ſibi ipſi additur, & fit productum ſecundi digiti; deinde producto idem diuiſor rurſus additur, & fit productum tertij digiti, & ſic deinceps, uſque ad 10 incluſiuè: deinde quatuor denarijs, 20, 30, 40, 50 additur productum denarij. Tot enim numeris opus eſt in qualibet diuiſione pro quotis inueniendis: qui conſtant vel digitis, vel articulis vel mixtis numeris. Quod ſi mixti occurrunt, qui non extant in tabula, eos additione articulorum & digitorum inuenire neceſſe eſt. V. G. 59′ non extant in tabula, ſed 50 & 9. quorum illius productū eſt 5. 4. 10: huius 54. 45: quæ coniuncta faciunt 5. 58. 55. Productum igitur 59′ ſupra poſitum fuit 5ª, 58ᵉ 55′.

Reliqua non aliam, quam vulgarem, & ſupra traditam rationem diuidendi requirunt.

Hinc apparet mutuas operas tradere multiplicationem & diuiſionem: unumque inſtrumentum per alterum, quàm optimè probari poſſe. Si enim productum multiplicationis diuidatur per multiplicantem, redibit multiplicandus; vel ſi per multiplicandum, redibit multiplicans, ſi bene facta fuit operatio. Et rurſus ſi quotus per diuiſorem multiplicatus fuerit, reſtituetur diuidendus, vel ſi diuidendus diuiditur per quotum, redibit diuiſor, ſi recta fuerit ſupputatis.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ.

πρότασις. Ex dato numero Aſtronomico radicem quadratam extrahere.

Duo ſunt caſus extractionis. Datus enim numerus aut ſimplex eſt, aut compoſitus. Et rurſus aut ſub numero pari aut impari, & rurſus aut verè quadratus, aut non verè quadratus.

ἐκθ.

ιxθ. primi casus. *Si sit numerus simplex & sub numero pari: inuestigatio lateris quadrati manifesta est per se; ut de 36°. radix quadrata est 6. Sex enim in se ducta gignunt numerum æquantem 6°.*

Si sit numerus sub numero impari, adde cogitatione parem, qui proximè sequitur ad dextram: ut sit inueniendum latus tetragonicum de 15 scrupulis primis, quia unitas siue prima est numerus impar, adde ad dextram locum secundorum sic. 15'. 0". Iam quæro radicem quadratam vel ex Canone hexacontadon, vel sine Canone. Ac ex Canone quidem radicem inuenio esse 30'. Nam ad lineam dagoniam trapezij, quæ continet numeros naturali serie sibi succedentes, qui radices denotant, ponuntur quadrati numeri hoc ordine, 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 1°. 4'. 1°. 21'. 1°. 40. 2°. 1'. 2°. 24'. 2°. 49'. 3 gr. 16'. 3 gr 45. & sic deinceps usq; ad 15 gr. 0', siue 15'. 0". cui apponitur numerus verticalis 30, radix quæsita.

Sine Canone inuenitur radix resolutione specierum maiorum in minores: per sexagenariam multiplicationem: unde 15'. 0". multiplicata per 60 faciunt 900", quorum radix est 30'.

Species emergens, qua ratione sit inuenienda, docent hi versus Edonis Hulderici.

Integra, vel primæ si sint, habet integra radix;
Sin minus, est tibi par dimidianda nota.

Quorum sensus est hic. Species emergens vel ex integris, vel ex paribus notis specierum inquiritur, sumendo vel notam integrorum, vel dimidium parium notarum. Cum enim nulla species in se multiplicata gignat speciem, cuius nota sit impar numerus, manifestum est hanc exquisitionem instituendam esse tantum in locis paribus, hoc est, immediatè ex ijs numeris, qui subsint speciebus, quarum notæ sunt pares numeri: ut sub gradibus, scrupulis secundis, quartis, sextis, octauis, item sub sexagenis secundis, quartis, sextis, & ita porrò utrinq; ab integro tanquam media. Inuenta autem maxima specie radicis mox inde apparent species reliquorum numero-

rum

rum totius radicis, sicut in multiplicatione & diuisione fiebat. In his enim omnibus species emergens tantum semel inquiritur. Quod si offeratur numerus impar, is reducitur ad parem, adiungendo sequentem numerum, ut in supra dato exemplo, radix 15 scr. primorum est 30 primorum. Adduntur enim 15 scr. primis sequens species, nempe 0'', qui numerus est par: cuius dimidium sunt prima. Sic 4' dant speciem emergentem 0'': 2ª dant speciem emergentem 1ª: 4ª habent speciem emergentem 2ª: prima autem habent speciem emergentem integra, quia primis adiungitur 0, siue integrum, hoc modo, 16ª. 0°. vel 16ª. 16°.

ἐκθ. secundi casus. *Proponatur 1 gr. 10', 46'', 41''', 40''''.*

Δ. Oportet *ex dato numero elicere latus tetragonicum.*

Κατ. 1. *Inuenta simplici radice, per præceptum primi casus, illius quadratum, ex Canone sumtū, vel sine Canone repertum, auferatur siue ab uno, siue à duobus numeris, & residua supra scribantur.*

2. *Quæratur diuisor duplando, quicquid est post lineam radicis; productum erit, diuisor, ita subscribendus dato numero, ut dexter eius numerus ponatur sub specie impari proximè sequente speciem sinistram, à cuius numero ante facta est subtractio: sinister vero numerus uno loco remotius versus sinistram.*

3. *Quæritur quotus ex Canone, quoties diuisor in supra scriptis numeris contineatur: isq; bis scribitur, semel post lineam radicis, & semel apud diuisorem versus dextram diuisoris sub specie pari proximè sequente diuisorem. In cæteris idem processus retinetur, qui in vulgiri extractione radicis obseruatur: ut in dato exemplo apparet, cuius supputatio sequitur.*

Diuisor

21
1°. 10'. 46''. 41'''. 40''''. (1°. 5'. 10''.
1

Diuisor —— 2 — 5 Quotus bis scriptus.

5

10 25

Diuisor ———— 2. 10. 10. Quotus bis
10 scriptus.

1 1 40
20 40

Productum 21. 41. 40.

Radix de 1 est 1 gr. qui in se multiplicatus & subtractus relinquit 0.

Duplum unitatis est 2, nouus diuisor, quæ in 10 quinquies continentur. Est igitur altera radix, 5: quæ in 5 & 2 multiplicata faciunt 10, 25: subtracta vero eadem à 10. 46, superioribus relinqunt 0, 21. Rursus iam inuenta radix 1°. 5' duplata sunt 2. 10, nouus diuisor: ex quibus 2 in 21, continetur decies, & tertia radix fit 10: quæ in 10, 10, 2 multiplicata faciunt 21, 41, 40: subtracta vero eadem à superioribus 21, 41, 40, nihil relinquunt.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico latus tetragonicum de proposito numero exquisitè esse 1°. 5'. 10''.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ in numeris vulgaribus: eaque vel Geometrica ex quarta propositione secundi elementorum Euclidis, vel Arithmetica ex theoremate Arithmetico.

κανονικὴ operationis sine Canone est hæc.

Primò elige aliquam speciem minimam, in qua ex dato numero velis habere radicem: ita ut aliæ species specie electa minores sine sensibili errore negligi possint, siue datus numerus sit verè quadratus, quod rarò accidit, siue surdus, quod plerunque contingit.

Deinde per multiplicationem sexagenariam datum numerum, ex quo radix extrahenda est, resolue in eam speciem, cuius nota est duplo maior, quàm nota electæ speciei. V. G. Si elegeris secunda, resolue propositum numerum in quarta. Quia quarta sunt duplo

maiora quàm secunda. Quod si electa species habuerit notam integrorum, etiam datus numerus in integra resoluendus erit.

Tertiò ex numero sic resoluto prorsus vulgari ratione extrahe radicem quadratam, quæ inuenta illius erit speciei, quam initio elegisti.

Postremò si radix inuenta maior quàm 60 fuerit, eam diuisione sexagenaria mutabis in species maiores, eo quo supra dictum est, modo. V. G. in superiori exemplo minima species inquirendæ radicis, quam elegerim, sit 2a seu secundorum scrupulorum. Datum igitur numerum oportet resolui in quarta scrupula. Ex quartis enim scrupulis species secundorum scrupulorum emergit. Numerus igitur datus 1° 10'. 46". 41‴. 40⁗. resolutus in quarta scrupula efficit 16288⁗060: ex quibus radix vulgari ratione extracta continet 3910. Cumque post extractionem radicis de resoluto numero nihil remaneat, signum est, datum numerum verè fuisse quadratum.

Postremò radix quadrata inuenta 3910 diuisione sexagenaria ad maiores species reducta producit 1° 5'. 10". Tanta est radix quæsita, eaque inuenta tum ex Canone, tum sine Canone.

ἐκθ. tertij casus. *Sit numerus non verè quadratus 2°.*

Δ. Oportet *ex dato numero elicere radicem quadratam.*

Κανων. *Idem est modus extractionis, qui antea: integro autem addantur plura scrupula, prima, secunda, tertia, quarta, cifris notata, quæ quarto interpunguntur, hoc modo, 20'. 0" 0‴ 0⁗. Sic igitur fit extractio. Radix de 2 est 1, quæ subtracta à 2, relinquit 1. 0. Diuisor nouus est 2, qui continetur in 1°. 0'. vicies quater. Iam 24 ducta in se & 2 faciunt 57'. 36", quæ subtracta ab 1°. 0', relinquunt 2'. 24". Rursus diuisor nouus est 2, 48, qui in 2. 24. 0 continetur 51. scrupula quæ supersunt, sine sensibili errore negligi possunt: possunt autem diuidi in infinitum.*

Diuisor

```
x   x   x4   28   49  |  0
x.  0.  0.   0.   0.  |  1
x                     |  24
Diuisor nouus  2   24 |  51
                   24
          ____________
             9   36
            48
          ____________
            57   36
Diuisor nouus  ——— 2.  48.  51
                            51
          ____________________
                       43.  21
                  40.  48
              1   42.
          ____________________
             x   x3.  5x.  xx.
```

Repetitio τῆς δοκ. *Dico radicem quadratam de numero proposito esse 1°. 24'. 51.*

Hæc radix est veræ propior, quàm quæ vulgari ratione inuenitur: secundum quam $\sqrt{2}$ est $1\frac{1}{2}$, eaque maior verä: vel $1\frac{1}{3}$ minor vera. Nam 1°. 24' facit in fractionibus $1\frac{2}{5}$. Sunt autem $1\frac{2}{5}$ minus quàm $1\frac{1}{2}$ una particula decima: & idem $1\frac{2}{5}$ maius quàm $1\frac{1}{3}$ una particula decima quinta. Pro media igitur inter utranque, eaque veræ bene proxima statui potest.

Medium enim Arithmeticum, ut docetur supra fol. 126, est $1\frac{5}{12}$ siue $\frac{17}{12}$ hoc modo. $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, quæ sunt extrema, quæ reductis prius ad eosdem denominatores duabus fractionibus, unde fient $\frac{9}{6}$ & $\frac{8}{6}$ addita faciunt $\frac{17}{6}$, quæ diuisa per 2 constituunt $\frac{17}{12}$, siue $1\frac{5}{12}$. Iam $1\frac{6}{12}$ siue $\frac{18}{12}$ maius est quàm $\frac{17}{12}$, una particula duodecima: $1\frac{1}{3}$ siue $\frac{16}{12}$ minor quàm $\frac{17}{12}$ una particula duodecima.

Δοκιμασία eadem est, quæ in vulgari Arithmetica. Radix enim inuenta in seipsam ducta adiunctis residuis, si qua fuerint, datum numerum omnino restituet. Vel datus numerus diuisus per radicem inuentam, eandem radicem restituet, remanentibus iisdem residuis, si qua fuerint, quæ antea de numero dato remanserant.

ARIHTMETICÆ PERFECTÆ ET DEMONSTRATÆ LIBER SEPTIMVS.

DE REGVLIS ARITHMETICIS.

REGVLA TRIVM.

πρότασις. Si quid cognitum fuerit de toto, illius simile cognoscetur etiam de parte, & contrà per regulam trium. Et si quid cognitum fuerit de uno, illius simile cognoscetur etiam de multis, & contrà, per regulam trium.

Multi sunt casus. Cognita enim & quæsita, continentur numero vel vulgari, eoq; siue integro, siue fracto: vel Algebrico, vel Astronomico.

Rursus data & quæsita congruunt proportione vel directa, vel conuersa: eaq; vel simplici vel multiplici. Simplex est, quæ quatuor terminis constat, & regula trium simpliciter vocatur. Multiplex quæ pluribus. Ex pluribus autem terminis fiunt quatuor, vel duplici positione, ut in regula duplici: vel additione plurium terminorum, ut in regula societatis: vel utroq; simul, ut in regula de intercapedine diuersi temporis in consortio. Quibus additur regula alligationis.

ἐκθ. primi casus. *Sit totum, nempe pannus 54 ulnarum, qui constet 6 florenis.*

Διορ. *Cupio scire quanti 7 ulnæ de illo panno veneant. Hic septem ulnæ sunt partes.*

Κατ. *Prima eaq; præcipua cura est recta collocationis trium numerorum in suis locis. Numerus quæstionis tertium locum occupet: & primum homogeneus tertio. Sic secundus erit homogeneus quarto, qui quæritur. Est autem numerus quæstionis, qui habet annexam particulam interrogationis quot, vel quantum. Tribus numeris datis sic aptè dispositis, tertius multiplicetur in secundum: & productũ diuida-*

diuidatur pro primum: tandem quotus, inde proueniens erit quartus numerus ignotus: hoc modo.

I.	II.	III.	IIII.
Vln.	*fl.*	*fl.*	*fl.*
14.	6.	7.	3.
		6	

42
14 (3
42

Repetitio τῆς διορ. *Dico 7 ulnas venire 3 fl. de illo panno, cuius 7 ulnæ veneunt 6 fl.*

Ἀπόδειξις alia est dispositionis, alia operationis. Ἀπόδειξις dispositionis est axioma illud. Quod iuris est de toto, idem est de parte. Et similium eadem est ratio. Homogeneæ autem tantum, id est, quæ genere non discrepant sunt analoga, ut numeri ad numeros, figuræ ad figuras. Sic magnus globus est similis paruo globo. Dissimilium autem, v. g. duarum plantarum ad quatuor anseres nulla est ratio in numeris in res quasdam iam implicatis.

Ἀπόδειξις operationis est eadem cum ἀποδείξει inuentionis quarti proportionalis, de qua lib. 4. fol. 137. Estque eadem etiam ἀπόδειξις cæterorum casuum.

συμπ. Ex cognito igitur aliquo de toto, simile illius de parte inuentum est, quod fecisse oportuit. Eadem est ratio multorum: item partium & paucorum.

ἐκθ. secundi casus. *Sit pars, nempe $7\frac{1}{2}$ ulnæ, quæ constent $3\frac{3}{4}$ fl.*

Δ. *Cupio scire, quanti $14\frac{2}{3}$ ulnæ de eodem panno veneant? Hic $14\frac{2}{3}$ sunt totum.*

Κατ. *Eadem est collocatio & operatio, quæ in præcedenti casu: sed hic fractiones mixtæ ad fractiones simplices primum reducendæ sunt, ut possit fieri multiplicatio & diuisio, hoc modo.*

Vl. *fl* *Vl.*

$7\frac{1}{2}$ facit $\frac{15}{2}$. $3\frac{3}{4}$ facit $\frac{15}{4}$. $14\frac{2}{3}$ facit $\frac{44}{3}$.

Iam $\frac{44}{3}$ ductis in $\frac{15}{4}$ emergunt $\frac{660}{12}$: deinde $\frac{660}{12}$ diuisis per $\frac{15}{2}$ fiunt $\frac{1320}{180}$, quæ valent $7\frac{1}{3}$.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico* $14\frac{2}{3}$ *uln. vanire* $7\frac{1}{3}$ *fl. de illo panno, cuius* $7\frac{1}{2}$ *ul. vaneunt* $3\frac{3}{4}$ *fl.*

ἐκθ. tertij casus. *Sit totum 48 ℞ sol. quibus emuntur 8 ℨ uln.*

Δ. *Cupio scire, 20 ℞ sol. quot ulnæ de eodem panno ementur? Hic 20 ℞ sunt partes.*

Κατ. *Eadem est collocatio & operatio, quæ in primo casu. Multiplicatio vero & diuisio Algebrica, hoc modo.*

48 ℞ sol. D. 8 ℨ ul. 9. 20 ℞ sol. D. $3\frac{1}{3}$ *ℨ uln.*

8 ℨ
16
160
48 ($3\frac{16}{48}$ | $\frac{1}{3}$.
144

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 20 ℞ sol. emi* $3\frac{1}{3}$ *ℨ uln. de illo panno cuius 8 ℨ ul. emuntur 48 ℞ sol.*

Δοκιμασία fit resolutione quantitatum ad vulgares numeros posito quocunque numero pro radice, v. g. ternario. Erunt igitur 48 ℞ sol. 144 solidi. 8 ℨ uln. 72 ulnæ. (Nam 3 tria sunt 9, & nouies 8 sunt 72) 20 ℞ sol. erunt 60 solidi. Numeri igitur tres sic ponentur.

Sol.		Vl.		Sol.		Vl.
144.	D.	72.	q.	60.	F.	30.

60
4320
144 (30.
432
144

Sunt autem 30 ulnæ nihil aliud, quàm $3\frac{1}{3}$ ℨ ul. posito 3 pro radice & 9 pro censu, hoc modo.

1 ℨ. D. 9. Q. $3\frac{1}{3}$ ℨ. F. 30.

ἐκθ. quarti casus. *Sit totum 30 horæ, quibus Sol medio motu perficit gradum unum, 13', 55".*

Δ. *Volo scire ex motu illo motum diei unius præcisè, qui 24 horis constat. Hic partes sunt 24 hor.*

Κατ.

Κατασ. Eadem est collocatio & operatio, quæ in primo casu: multiplicatio autem & diuisio Astronomica, hoc modo.

H.						H.			
30.	D.	1°.	13'.	55''.	Q.	24.	D.	59'.	8''.

24°.

22. 0

5. 12

24

29°. 54. 0''. (59'. 8''.

50°. 30.

29. 50

Repetitio τῦ διορ. *Dico Solem medio motu intra spacium unius diei perficere 0°. 59'. 8''.* σχόλιον.

1. Vtilitas regulæ trium magna est, & mirabilis, incredibiles effectus pariens. Quæcunque enim opera mirifica, & necessaria ad vitam communem faciunt omnes artes tum liberales, tum illiberales, ea ferè huius regulæ beneficio concinnantur. Hinc illam alij regulã simpliciter κατ' ἐξοχὴν vocant, alij regulam auream. Alij vero ab obiecto regulam rationum vel proportionum, vel regulam quatuor proportionalium: & regulam trium. Quod vero quidam regulam philosophorum, quidam etiam regulam mercatorum appellant, id falsum quidem nomen non est: sed amplitudinem regulæ non exprimens. Altius enim caput suũ excollit, quàm ut angustis philosophorum & mercatorum tabernis includi posit.

Ego regulã regularum appellandã esse iudico: eò quod caput est Arithmeticæ, & fundamentum omnium regularum, quæ in hac arte succedunt. Nec regula Falsi & regula Algebræ aliud sunt, quàm præludia quædam, quæ ad regulam Detri exempla præparent.

Trium appellant, quod tres numeros adhibet, de quibus quartũ ignotum in notitiam educit. Hinc Itali corrupto nomine Detri, quasi de tribus appellare solent. Auream, quod cæteris Arithmeticæ regulis veluti aurum cæteris metallis præstet.

Regulam proportionum, quod per tres datos numeros quartum in ea proportione inquirit, quæ primus secundum respicit.

2. Nomina terminorum huius regulæ varia sunt. Vulgo usurpata, à numero & situ nomen accipiunt, & vocantur, primus, secundus,

cundus, tertius, & quartus ignotus. Mercatores primum vocant emtionis: secundum precij: tertium quæstionis, quartum productum. Mathematici alijs nominibus utuntur. Quælibet enim ratio versatur inter duos terminos, quorum qui primo loco ponitur antecedens dicitur: qui secundo loco, consequens: & consequens posterioris rationis, cum fuerit ignotum, certa ratione inquiritur: & alio nomine pars proportionalis vocatur. Græcis τὸ ἐπιβάλλον ἀναλογικὸν; subauditur enim μέρος. Hinc Astronomicus calculus præcipit posterioris rationis, quam cum priore eandem esse oportet, τὸ προηγούμενον multiplicare εἰς ἑπόμενον prioris: & productum partiri παρὰ προηγούμενον eiusdem prioris rationis, ut inde excudatur τὸ ἐπιβάλλον.

3. Ordo terminorum in supputatione duplex est: directus & permutatus. Directus est philosophicus, quo prioris rationis antecedens, & secundus eiusdem rationis consequens res eiusdem speciei numerant: similiterque tertius numerus, qui posterioris rationis est antecedens, & quartus ignotus in denominatione specierum consentiunt. Permutatus est vulgaris, quo prioris & posterioris rationis antecedentes sunt numeri eiusdem speciei & nominis: sic prioris & posterioris rationis consequentes nominibus conueniunt. Prior ordo tum expeditior tum melior est, quàm posterior. Magnam enim & dexteritatem & facilitatem ordinationi numerorum in omnibus materijs adferre videtur. V. G. Si notum sit 6 modios tritici emi 9 florenis: quæratur autem quot florenis seruata ratione væneant 48 modij, duplex est ordo terminorum.

Primus, isque philsophicus est hic.

Modij	Modij	fl.	fl.
6.	48.	9.	72.

Secundus, isque vulgaris est sic.

Modij	fl.	Modij	fl.
6.	9.	48.	72.

In primo modo directa est proportio. Quæ enim ratio est modiorum 6 ad modios 48, ea etiam debet esse precij ad precium. In secundo modo permutata est proportio, qui & ipse æquè, ut prior omnis generis quæstionibus satisfacit. Nam, ut probat Euclides 16. lib. 5. Si quatuor quantitates proportionales fuerint, & permutatim proportionales erunt. Potest igitur fieri terminorum transpositio, sine ullo incommodo supputationis. Priorem modum quidam vocant ab antecedente ad antecedens: alterum ab antecedente ad consequens.

4. In uniuersa Arithmetica sicut nihil est præstantiùs regula trium,

ita ni-

ita nihil eadem factu facilius, si numeros rectè disposueris.

5. Si numeri sunt heterogenei, reducendi sunt ad homogeneos. Ex minoribus autem fiunt maiora per diuisionem: ex maioribus fiunt minora per multiplicationem. V.G. Si quis proponat sic. 9 florenis emuntur 6 modij: cruciferis 48 quantum emetur. Hic 9 fl. erunt resoluendi in cruciferos, multiplicando 9 per 60, & fient cr. 540, collocandi primo loco, ut primus & tertius se & nomine conueniant. Facta operatione quartus ignotus erit $\frac{288}{540}$, siue $\frac{8}{15}$ unius modij.

Idem faciendum in numeris Algebricis: ut si quis proponat sic. 6 ℞ fl. dant 3 ʒ uln. quantum dabunt 20 ℞ solidi. Hic floreni sunt reducendi ad solidos, multiplicando 6 per 7. (Tot enim solidi unum florenum faciunt): eruntque numeri sic. 42 ℞ d. 8 ʒ q. 20. D. $3\frac{1}{5}$. Eadem est ratio in numeris Astronomicis.

6. Operatio constat vel simplici vel duplici instrumento. Simplex est sola multiplicatio. Duplex est multiplicatio & diuisio simul. Tres autem numeri qui occurrunt, sunt aut integra, aut fractiones, eæque vel simplices, vel mixtæ. Si integra fuerint, & frangantur subscripta unitate: primus autem inuertatur, sufficit sola multiplicatio. Si tres numeri fuerint fractiones simplices & primam fractionem inuertas, tum hoc facto tres numeratores, ut ante inuicem multiplices, similiter & totidem denominatores, productum erit numerus quartus, isque ignotus.

Quod si tres numeri fuerint mixtæ fractiones, eas primum ad simplices reducito & operator, ut prius.

Denique si tres numeri constant partim integris, partim fractis, integros tantum frange subscripta unitate, relictis in suo statu minutijs, & operationem perage ut antea V.G. Primus casus. Vlnæ 3 væneunt fl 2. Ergo ulnæ 9 ementur fl 6 hoc modo.
$\frac{1}{3}$ D $\frac{2}{1}$ Q $\frac{9}{1}$ | D. $\frac{18}{3}$ id est fl 6. Hic $\frac{3}{1}$ inuerto sic $\frac{1}{3}$. Secundus casus. Vl. $\frac{3}{4}$ væneunt fl. $\frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{4}$ emetur $\frac{1}{6}$ fl. hoc modo. Vl. $\frac{4}{3}$ D fl. $\frac{1}{2}$ Q $\frac{1}{4}$ D. $\frac{4}{24}$. Hic $\frac{3}{4}$ inuertuntur sic $\frac{4}{3}$: & ex $\frac{4}{24}$ fit $\frac{1}{6}$ per reductionē. Tertius casus. Vlnæ $3\frac{1}{4}$ væneunt fl $3\frac{3}{5}$. Ergo ulnæ $9\frac{1}{7}$ ementur fl. $10\frac{58}{455}$. Hi numeri primū reducuntur sic $\frac{13}{4}$ D. $\frac{18}{5}$. Q. $\frac{64}{7}$. Deinde fit operatio hoc modo. $\frac{4}{13}$ D. $\frac{18}{5}$ Q. $\frac{64}{7}$ D $\frac{4608}{455}$.

Hic $\frac{13}{4}$ inuertuntur sic $\frac{4}{13}$ & ex $\frac{4608}{455}$ fient $10\frac{58}{455}$ per diuisionē.

Quartus casus. Vlnæ $3\frac{1}{4}$ væneunt fl. 3. Ergo ulnæ $9\frac{1}{7}$ ementur fl. $8\frac{40}{91}$. Hi numeri primùm reducuntur sic, $\frac{13}{4}$ D. $\frac{3}{1}$ Q. $\frac{64}{7}$: deinde fit

operatio, hoc modo. $\frac{4}{13}$ D. $\frac{2}{1}$. Q. $8\frac{4}{7}$ D. $7\frac{58}{91}$. Hic $\frac{13}{4}$ inuertitur sic, $\frac{4}{13}$, & ex $7\frac{58}{91}$ fiunt $8\frac{40}{91}$.

Hic modus vulgari tum breuior, tum minutiarum tractationi minus assuetis facilior est. Ratio compendij indicatur lib. 2. scholio 4. Nam si termini diuisoris inuertantur, fit diuisio perinde ut multiplicatio.

7. Sola diuisione quartus numerus inuenitur varijs modis, de quibus dictum supra lib. 3. sub titulo de inuentione quarti proportionalis fol. 140. Id vero perspicuum per se est, nec longiore explicatione indiget; solam diuisionem sufficere, si secundum vel tertiũ locum unitas obtineat: ut solam multiplicationem satisfacere quæstioni, si ipsa unitas primum locum occupet. Vnitas enim neque multiplicat, neque diuidit.

8. Si primus & secundus: vel primus & tertius fuerint inter se compositi, numerus proportionalis breuius inuenietur, si ad partes quascunque ut medias, tertias, præsertim vero minimas reducatur. Partes enim æque multiplicium eandem ad inuicem rationem obseruant. Vt quoniam rationem sesquialteram habent 18 ad 12: eandem constituunt eorum medietates 9, & 6, & horum tertiæ eæque minimæ partes 3 & 2. Sint igitur v. g. numeri tres. Primus 30, secundus 18, tertius 120. Volens inuestigare quartum proportionalem reduco compositos, primum & secundum ad minimos terminos per communem mensuram maximam sex, & fiunt 5 & 3. Iam sic dispono numeros & dispositos supputo.

5. D. 3. q. 120. D. 72.

3
———————
1
360 (72.
55

Eodem modo primum numerum cum tertio conferens: cum sint compositi, eos ad minimos terminos reduco diuidendo utrunque per communem mensuram maximam 30, & fiunt 1 & 4. Iam numeros sic dispono & supputo.

1. D. 18. q. 4. D. 72.

4
———
72

9. Quod si primus numerus ad utrunque numerum & secundũ & tertium conferri possit, utrunque compendium adhiberi potest, ut in dato exemplo 30, 18, 120. Primum numeri collocari ad secundum

cundum partes dimidiæ sunt 15,& 9: parte tertiæ 15 & 9 sunt 5 & 3. Rursus primi numeri quinque collati ad tertium 120 partes minimæ sunt 1 & 24. Iam sic dispono numeros. 1. D. 3. q. 24 F. 72, ut prius.

10. Quod si terminorum aliquis in regula trium plures denominationes habeat, potest fieri operatio vel pluribus reductis ad unam speciem: vel singulorum seorsim multiplicatione & diuisione: ut si quis proponat sic. 3 amphoræ uini, væneunt 4 fl. 5 ursatis, 6 denariolis, quanti væneunt 10? Hic supputatio fit aut per reductionem, aut sine reductione.

Reductio est, si 4 fl. 5 ursati, 6 denarioli reducantur ad summam denariolorū, multiplicando 4 fl. per 210,& fient 840 denar. rursus multiplicando 5 ursatos per $10\frac{1}{2}$ (Tot enim denariolis ursatus cōstat)& fient $52\frac{1}{2}$. Iam hæc tria 840, $52\frac{1}{2}$,& 6 addita faciunt $898\frac{1}{2}$ siue $\frac{1797}{2}$. Numeri igitur tres erunt sic. 3. D. $\frac{1797}{2}$ q. 10. D. $\frac{17970}{2}$, id est, denar. 2995, siue fl. $14\frac{55}{210}$

Sine reductione fit operatio sic. Ducto ultimo in singulos medios,& quod inde fit eodem modo per primum diuiso redeunt fl. $13\frac{1}{3}$, ursati $16\frac{2}{3}$, denarioli 20. Quæ omnia in unum addita faciunt 14 fl. $3\frac{1}{3}$ ursatos, 20 denar. Iam $3\frac{1}{3}$ ursati faciunt 35 denar. quibus additi 20 constituunt 55, ut supra. 20 autem ursati, ut 210 denar. unum florenum,& unus ursatus denar. $10\frac{1}{2}$ valet.

Potest eadem supputatio perfici & per fractiones, hoc modo, 3. D. $\frac{4}{1}$ $\frac{5}{20}$ $\frac{20}{210}$ q. 10. Nam $\frac{4}{1}$ faciunt 4 fl. $\frac{5}{20}$ fl. 5 ursatos: $\frac{20}{210}$ fl. 20 denar. Iam summa trium fractionum est $\frac{17970}{4200}$: quæ per 10 multiplicata faciunt $\frac{179700}{4200}$: eadem diuisa per 3 procreant $\frac{179700}{12600}$: quorum valor sunt 55 denarioli, ut supra.

11. Δοκιμασίαν operis perfecti variam tradit liber tertius, loco supra citato. Sunt autem duo postremi modi maximè idonei, ijque ex apodixi operationis desumti hi, quos sequens schema ex primo exemplo ostendit.

14. D. 6. q. 7. D. 3.

$2\frac{1}{3}$ 42. $2\frac{1}{3}$.

42

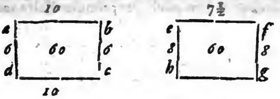
Hic productum extremorum 3 & 14 est 42. Tantum est etiam productum intermediorum 6 & 7. Rursus eadem est ratio 14 ad 6, quæ est 7 ad 3. Vtrobique enim est ratio dupla sesquitertia, hoc modo, $2\frac{1}{3}$.

REGVLA TRIVM CONVERSA.

πρότασις. Si ſcitur aliquid de uno æquali, quantum creſcat illius pars una creſcente altera: & contra quantum decreſcat creſcente altera: ſcietur etiam quantum in altero æquali alterutra pars creſcat, decreſcatúe creſcente, decreſcenteúe altera, per regulam conuerſam.

Caſus huius propoſitionis ratione obiecti ſunt plures. Augetur enim, minuiturúe vel latus parallelogrammi, vel pondus, vel menſura, vel tempus, vel numerus, vel aliud tale quippiam.

ἔκθ. primi caſus de parallelogrammo. *Sit parallelogrammũ* a b c d *cuius longitudo* a b *ſit 10 pedum: latitudo* a d *6 pedum: ſit vero alterum quoq; parallelogrammum* e f g h *eiusdem capacitatis, cuius latitudo* e h *ſit 8 pedum.*



Διορ. *Cupio ſcire, quanta ſit longitudo illius. Hic creſcente latitudine* e h *decreſcit longitudo* e f*: ut decreſcente* a d *creſcit* a b.

Κατασκ. *Collocatio terminorum hic eadem, quæ in directa regula. Operatio vero alia. Primus enim ducitur in ſecundum: & productum per tertium diuiditur, hoc modo.*

Latit.	*Longit.*		*Lat.*	*Longit.*
ad *6. D.*	ab *10.*	*Q.*	eh. *8. D.*	ef *7½.*
60				60

4
6̶0̶ (7⁴⁄₈ | ½.
8̶
5̶6̶

Repetitio τοῦ διορ. *Dico latus longitudinis eſſe 7½ pedum.*

Ἀπόδειξις.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. ſententia multipl. Data longitudine & latitudine rectanguli dabitur illius area per multiplicationem. Rectanguli A C datur longitudo & latitudo: illa 10, hæc 6 pedum. Ergo per multiplicationem datur area 60 pedum. Hæc eſt cauſa, cur primus multiplicetur per ſecundum.

2 Syll. ſententia. Dato uno æqualium dabitur alterum. Parallelogrammum A C eſt æquale parallelogrammo E G per hypotheſin. Sunt enim eiusdem capacitatis. Ergo parallelogrammi E G area eſt 60 pedum.

3 Syll. ſententia diuiſ. Data area & uno latere dabitur alterum latus per diuiſionem.

Parallelogrammi E G area eſt 60: & unum latus E H eſt 8 pedũ. Ergo alterum latus E F per diuiſionem eſt pedum $7\frac{1}{2}$. Hæc eſt cauſa cur productum diuidatur per tertium.

συμπέρ. Datis igitur duobus æqualibus, quod ad aream, inæqualibus quod ad latera, quorum unius dantur duo latera: alterius unum tantum latus, inuentum eſt etiam alterum latus, *quod fecisse oportuit.*

Idem demonſtrari poteſt aliter per 14. lib. 6. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Nam duo parallelogramma A C, E G ſunt æqualia per hypotheſin, habentque angulos F E H, B A D inter ſe æquales. Ergo latera E H, A B, A D, E F ſunt reciproca: & per conſequens ut ſe habet A D, E F, ita E H, ad A B, Vtrobique enim eſt ratio ſubſeſquiquarta.

ἔκθ. ſecundi caſus de pondere. *AVG. VIND. cum A. D. 1547. ſcaphus farris emeretur uno floreno, panis unus ex eo confectus pretij 4 trientum æquauit pondus librarum $5\frac{1}{4}$: hoc vero anno 1600 poſt meſſem fl. $4\frac{1}{2}$ emitur.*

Δ. *Cupio ſcire, unus panis precij 4 trientum, quot librarum nunc eſſe debeat? Hic quò magis creſcit annona, eò pondus panis magis decreſcit: & contrà decreſcente illa, pondus panis augetur.*

Κατ. *eadem, quæ præcedentis caſus, hoc modo.*

fl.	Lib.	fl.	lib.
1. d.	$5\frac{1}{4}$ q.	$4\frac{1}{2}$. d.	12.

$2\frac{1}{4} \times \frac{9}{2}$ | $\frac{42}{72}$. ($1\frac{1}{6}$.

Repetitio τῦ διορ. *Dico unum panem 4 trientum nunc habere pondus libra $1\frac{1}{8}$.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ in primo casu. Nam floreni sunt instar lõgitudinis: libræ instar latitudinis: *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. tertij casus de mensura. *Sint 24 ulnæ holoserici, cuius latitudo est unius ulnæ, subducenda panno lineo, cuius latitudo ulna $1\frac{1}{8}$.*

Δ. *Cupio scire quot ulnis panni linei opus sit, ut exæquent totum holosericum?*

Κατ. *eadem quæ in primo casu, hoc modo.*

Lat. Longit. Lat. Longit.

1. D. 24. Q. $1\frac{1}{8}$. D. $21\frac{1}{3}$.

$\frac{24}{1} \times \frac{9}{8}$ 192 ($21\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$.

Repetitio τῦ διορ. *Dico pro subductione holoserici opus esse ulnis $21\frac{1}{3}$ panni linei pro longitudine.*

Ἀπόδειξις est eadem quæ in primo casu. Nam duo panni, lineus & holosericus sunt duo parallelogramma inter se æqualia: latera vero inæqualia, sed reciproca. Nam quanto longitudo & latitudo unius maior est: tanto eadem minor alterius: *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. quarti casus de tempore. *Tres sunt operarij, qui turrim quandam 120 diebus se perfecturos aiunt: ut verò citius absoluatur, conductor octo adhuc operarios adhibere cogitat.*

Δ. *Cupio scire, quanto temporis interuallo idem opus tot operarij absoluturi sint?*

Κατα. *eadem est, quæ præcedentium casuum, hoc modo.*

Operæ.

Operæ.	*Dies.*	*Operæ.*	*Dies.*
3. D.	*120.* Q.	*8.*	*45.*

3
———
4
360
88 (45.
32
40

Repetitio τῦ διοϱισ. *Respondeo 45 diebus id opus perfectũ iri.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ in primo casu. Dies enim & architecti habent se reciprocè, ut latera in parallelogrammis: *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. quinti casus de numero. *Quædam arx obsessa, ad cuius defensionem intromissa sunt 3000 hominum, de commeatu sibi prospexit, quo sustineri dicti milites ad 6 menses possunt, sed nulla soluendæ obsidionis spes ante unum annum?*

Δ. *Cupio scire, quot milites dimittendi sint, ut reliquis idem commeatus annuo temporis spacio sufficere possit. Hic quanto maior est numerus militum, tanto minor numerus mensium & contra?*

Κατασκ. *eadem est, qua præcedentium casuum, hoc modo.*

Mens.	*Milit.*	*Mens.*	*Mil.*
6. D.	*3000.* Q.	*12.* D.	*1500.*

6
18000
122 (1500.
1
602
1

Repetitio τῦ διοϱισμῦ. *Dico milites, quibus sufficiet victus in annum integrum, debere esse 1500: & totidem dimittendos esse. Tantum enim est residuum subtractis 1500 à 3000.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ in primo casu. Menses enim & milites habent se reciprocè, ut latera in parallelogrammis, *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ.

ἔκθ. alterius casus, de rotæ conuersionibus. *Rota, cuius absidis extremæ ambitus est pedum 30, per certum interuallum reuoluitur 1500: sit autem altèrius rotæ maximus circuitus tantum 18 pedibus constans.*

Δ. *Cupio scire, quot conuersiones per idem interuallum rota faciet? Hic quanto minor est ambitus secundæ rotæ, eò plures sunt conuersiones, & contrà.*

Κατ. *eadem est, qua præcedentium casuum, hoc modo.*

Ambitus rotæ.		*Conuersiones.*		*Ambitus.*		*Conuers.*
30.	D.	1500.	Q.	18.	D.	2500.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico rotæ secundæ reuolutiones per idem interuallum fore 2500.*

Ἀπόδειξις *est eadem, qua præcedentium casuum. Ambitus enim rotæ sunt instar lateris latitudinis: conuersiones instar lateris longitudinis in duobus parallelogrammis,* quod fecisse oportuit.

σχόλιον.

1. Regulam conuersam alij inuersam vocant: quidam euersam, sed barbarè: eruditiores cum Euclide ἀνάπαλιν & ἀντιπεπονθότων λόγων. Latinè reciprocam. Supra proportionem reciprocam appellauimus lib. 3. fol. 119. Conuersam siue inuersam vocant, quasi obliquam directæ oppositam, propter conuersum rationum habitum. In directa enim quanto tertius maior fuerit, tanto etiam quartus auctior euadit & contrà: in conuersa, quantò plus augetur tertius: tantò magis quartus decrescit, & econuerso. Est & conuersa praxis. Nam in directa regula tertium in secundum ducimus: & productum primo diuidimus: in obliqua primum secundo multiplicamus, & productum tertio diuidemus.

2. Eandem ob causam vocatur proportio ἀνάπαλιν, eò quod explicatur non procedendo, ut in regula directa, & in collocatione: sed recedendo: ut cum dico. 12 operæ absoluunt opus 4 diebus. Ergo 16 operæ idem absoluent diebus tribus. Sic 12. d. 4. Q. 16. D. 3. Hæc est collocatio: explicatio autem fit recedendo sic. Vt se habet 12 ad 16 sic 3. ad 4.

3. Reciprocam vocat Euclides eandem ob causam. Nam, ut desinit idem def. 2 lib 6. Reciprocæ figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes termini rationes fuerint: ut in præcedente

cedēte exemplo, duæ sunt figuræ inter se æquales, una 48 ex 12 & 4: altera similiter 48 ex 16 & 3. rationes autem laterum sunt reciprocæ. Nam ut se habet 12 antecedens prioris figuræ ad 3 consequens posterioris: ita 16 antecedens posterioris, ad 4 consequens prioris. Vtrobique enim ratio est quadrupla. Aliter vero se res habet in regula trium directa in qua rationes laterum sunt directæ. Nam ut se habet primū ad secundum: sic tertium ad quartum. Vt igitur prima procedit directè: ita altera recedit, manifesta reuersione, quæ recessio reciprocatio dicitur: Græcis ἀντιπεπονθότως λόγου. Nec dissentit usitata reciprocationis significatio. Vt enim reciprocationem vulgo appellamus, eiusdem uiæ retrogradam repetitionem: ita proportio reciproca est, quæ directè procedit in terminis extremis: ordine autem retrogrado in terminis intermedijs. In collocatione igitur illic est ἀνάλογος τέταρτος: hic ὑπάλογος τέταρτος.

4. Ex demonstratione apparet usus multiplicationis & diuisionis. Productum enim multiplicationis est area: multiplicans & multiplicandus sunt duo latera. Rursus diuidendus est area: diuisor & quotus sunt duo latera: ac diuisor quidem notum latus: quotus ignotum, quod quæritur, Græcis πλάτος τῆς παραβολῆς, quod sit tanquam latitudo rectanguli, quod ad datam rectam lineam dato orthogonio æquale explicatur.

5. Regulæ inuersæ nullus est usus, ubi puræ quantitates tractantur citra ullam materiam; magnus vero usus est in communi vita, ubi numeri in rebus numeratis ad usum transferuntur.

6. Regula conuersa reducitur ad directam, si quartus numerus reliquis tribus ordine dispositis præponatur: ut termini conuersæ regulæ in præcedente exemplo hi. 12. 4. 16. 3. Termini ad directam regulam reducti sunt hi. 4. 16. 3. 12.

7. Idem est compendium operationis in regula conuersa, quod fuit in directa redactis ad συζυγικοὺς suos terminis primo & tertio: ut 3 dant 4, quantum 4; atque ita tum secundum methodum præsentis regulæ ductis 3 in 4, eoque quod inde fit, per 4 diuiso, colligitur tria, ut prius.

8. Eadem quoq; ratio conuersæ est quæ directæ in numeris fractis, numero tamen tertio inuerso: & reductis, si opus sit, cæteris terminis ad fractiones simplices: ut panno, cuius longitudo est 8 ulnarū, & latitudo $1\frac{1}{2}$ subducendus est alius pannus, cuius latitudo sit minor $\frac{3}{4}$ siue dodrantis unius ulnæ. Quæritur quot ei opus sit talium ulnarum? Reductis integris & mixta fractione ad fractiones, easque simplices: dispositio & inuersio cum praxi est hæc.

$\frac{3}{2}$ D. $\frac{8}{1}$. Q. $\frac{4}{3}$ | D. $\frac{96}{6}$ | *id est,* 16.

Respondeo itaque sumi oportere 16 ulnas, cum subducendæ sunt 8 ulnæ, quarum latitudo est $1\frac{1}{2}$

9. Δοκιμασία potest esse varia: vel reductione terminorum ad regulam directam, vel adhibito proprio reciprocæ proportionis. Productum enim duorum priorum est æquale producto posteriorum.

REGVLA DVPLEX.

Πρότασις. Si quid scitur de uno principali circumstantia quadam definito: scietur illius simile etiam de multis principalibus circumstantia quadam definitis, & contrà, per regulam duplicem.

Duo sunt casus huius regulæ. Exempla enim quædam ad regulam directam, quædam ad reciprocam referuntur.

Ἔκθ. primi casus. *Scitur aliquid de 10 bobus (tanquam uno principali) quod arent iugera 35 per 7 dies (hæc est circumstantia temporis): adsunt autem 20 boues, quibus per 24 dies uti possumus.*

Δ. *Cupio scire 20 boues per 24 dies quot iugera arabunt? Hic cum crescentibus bobus & diebus crescunt iugera: eam ob causam exemplum ad directam regulam pertinet.*

Κατ. *Duæ sunt partes κατασκευῆς: iusta collocatio, & legitima operatio.*

Iusta collocatio est, ut numerus quæstionis, id est principalis collocetur quarto loco, circumstantia quinto loco: primus vero & secundus re & nomine quarto & quinto consentiant: medium locum obtineat homogeneus sexto, id est ignoto. Rursus operatio duabus constat positionibus, quarum quælibet ex tribus datis quartum inuestigat. Ac in prima quidem positione sumuntur tres, primus, tertius & quartus: & per methodum regulæ trium inuenitur primus quartus. Secunda positio ex datis alijs tribus, secundo, primo, quarto & quinto, per eandem methodum inuenitur secundus quartus: id est sextus, qui in διορισμῷ quærebatur, hoc modo.

Disposi-

Dispositio quinque numerorum.

I.	II.	III.	IIII.	V.	VI.
Boues	*Dies*	*Iugera*	*Boues*	*Dies*	*Iugera.*
10.	*7. D.*	*35. Q.*	*20.*	*24. D.*	*0.*

Hic primus & quartus: sic 2 & 5: item tertius & sextus sunt cognomines.

Operationis prima positio.

Boues		*Iugera*		*Boues*		*Iugera.*
10.	*D.*	*35.*	*Q.*	*20.*	*D.*	*70.*

20

7ø|0 (70.

xx|0

Operationis secunda positio.

Dies		*Iugera*		*Dies*		*Iugera.*
7.	*D.*	*70 —*	*Q.*	*24.*	*D.*	*240.*

70

x

x680

777 (240.

14

Repetitio τῆς ἀποφ. *Dico 20 boues per 24 dies araturos iugera 240.* Ἀπόδειξις.

1 Syll. Axioma 11. lib. 1. Numerare per partes & per totum est idem.

Vnus numerus est pars: duo numeri sunt totum. Vnus numerus in dato exemplo est 10 boues, duo sunt 10 boues, 7 dies.

Ergo numerare per unum numerum bis est idem, quod numerare per duos semel. Hæc est causa duarum positionum.

2 Syll. sententia. Datis tribus numeris dabitur quartus proportionalis per regulam trium.

Tres numeri bis dantur, primum 10. 35. 20. Deinde 7. 70. 24.

Ergo per regulam trium dantur duo quarti proportionales, primus 70, secundus 240: *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. secundi casus. *Dantur 15 messores, qui demetunt iugera 10, diebus 8.*

Δ. *Quæritur quot diebus messores 20 demetent iugera duodecim? Hic crescentibus messoribus decrescunt dies: ideoq́ exemplũ ad regulam reciprocam pertinet.*

Κατασκ. *Totidem sunt partes κατασκ. quot præcedentis casus. Primum enim quinq́ numeri rectè disponuntur, ut antea: operatio vero similiter constat duabus positionibus, in quibus adhibetur primũ regula reciproca, deinde directa methodus, hoc modo.*

Dispositio quinq́ numerorum.

Messores	Iugera	Dieb.	Mess.	Iugera	Dieb.
15.	10.	8.	20.	12.	0.

Operationis prima positio.

Mess.		Dies.		Mess.	Dies.
15.	D.	8.	Q.	20.	6.
8					

Hæc est methodus reciproca.

12|0 (6
2|0

Hic enim crescentibus messoribus decrescũt dies.

Operationis secunda positio.

Iugera		Dies		Iugera		Dies.
10.	D.	6.	Q.	12. —	D.	$7\frac{1}{5}$.
				6		

Hæc est methodus directa. Hic crescentibus iugeris crescunt dies.

7|2 ($7\frac{2}{10}$|$\frac{1}{5}$.
1|0

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 20 messores demessuros iugera 12, diebus $7\frac{1}{5}$.*

Ἀπόδειξις *duarum positionum est eadem quæ in præcedenti casu. Quod autem duplex, eaq́ diuersa methodus in operatione adhibetur, causa est, quod in prima positione crescentibus messoribus decresunt dies: in secunda positione crescentibus iugeribus crescunt dies.*

Συμπερ. *Datis igitur quinq; numeris duplicis condicionis, datus est sextus ignotus,* quod fecisse oportuit.

σχόλιον.

1. Regula duplex & dupla & duplicis positionis, Germanis zwifacher satzunge, vocatur vulgo: alijs regula quinque numerorum: item sex quantitatum: alijs proportio composita: alijs simpliciter regula trium composita. Ac tot quidem nominibus notatur tum à duplici numero, qui in quæstione, eoque loco, qui quæstioni materia & re subiecta respondet, poni solet: tum à duplici positione, quæ in supputando adhibetur. In tota autem quæstione sunt quinque numeri ante operationem: sex post operationem.

2. Duplex positio, quæ duplicem operationem requirit, communiter negligitur ab Arithmeticis, & traditur compendium, quo quæstiones huius regulæ per unam positionem supputantur, multiplicando nimirum in se binos numeros siue directè, siue decussatim: unde ex productis tres termini emergunt: ex quibus elicitur quartus methodo regulæ directæ, vel obliquæ: ut in primo exemplo sic.

I.		II.	III.	
70	10 boues	Iugera	Boues 20	480.
	7 dies	35	Dies 24	

Hic quinque termini ad tres rediguntur directè multiplicando sic. Septies 10 sunt 70: vicies 24 sunt 480. Erit igitur collocatio terminorum sic. 70. d. 35. q. 480. Tandem operatio per regulam directam est hæc. 35 ducta in 480 faciunt 16800: & hæc diuisa per 70 procreant 240, ut supra.

In secundo exemplo sic.

180	15 Messores	Dies.	Messores 20	200
200	10 Iugera	8	Iugera 12	180

Hic quinque termini ad tres rediguntur decussatim multiplicando sic. Decies quinquies 12 sunt 180. Decies 20 sunt 200. Erit igitur collocatio terminorum sic. 180. d. 8. q. 200. Tandem operatio per regulam reciprocam est hæc. 8 ducta in 180 faciunt 1440: & hæc diuisa per 200 procreant $7\frac{1}{5}$, ut supra.

3. Ἀπόδειξις compendij pendet ex 5 prop. 8. Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam, id est, eadem est ratio totorum ad se, quæ partium, ex quibus tota conficiuntur.

Nam in primo exemplo tota sunt 70 & 480: partes sunt 10 & 7, item 20 & 24. Ergo eadem illorum ad se ratio, quæ 10 ad 7 & 20 ad 24: siue unica ratio totius ad totum est composita ex duabus binorum numerorum.

In altero exemplo tota sunt 180 & 200: partes sunt 15 & 12: item 10 & 20. Ergo & hic eadem ratio totius ad totum, quæ binarũ partium ad binas partes: & per consequens perinde est, si quis operetur per tres, vel quinque numeros.

Fit autem multiplicatio in secundo casu decussatim: ut non duo primi & duo posteriores in se ducantur, sed primus & quotus: sic quartus & secundus. Eius causam ante oculos ponit analysis dati exempli, quod resolutum in duas positiones partim directæ, partim reciprocæ regulæ methodum requirit: ut supra apparuit. Termini enim tum ita affecti sunt, ut uno crescente decrescat alterum: tum ita, ut uno crescente crescat alterum. Ducitur igitur primus in quintum: & quartus in secundum: ac primus quidem in quintum pro directa: quartus in secundum pro reciproca regula.

4. Diuersitas methodi in duplici casu compendij multorum ingenia confundit, & sæpe errandi occasionem præbet. Regia igitur via per duplicem positionem commodior ad usum videtur, quàm compendium, quod simplici positione utitur. Sic enim facilius apparet, ubi uno crescente crescat vel decrescat alterum: & reductione ad tres numeros diuersa tunc opus non est.

5. Si secundus & quintus, vel primus & quintus æquales occurrerint: tum sublatis ijs, sufficit methodus regulæ trium simplicis. V. G. Si 25 fl. lucrum est quadriennio fl. 8, tum fl. 100. lucrabuntur annis 4 fl. 32. Sic enim fit supputatio 25. d. 8. q. 100. d. 32. Sic si de 25 fl annis 4 lucrum venit 8 fl. de 100 fl. 25 annis redibit lucrum 200 fl. In primo exemplo sublata sunt 4: in altero 25, cum bis occurrant. Plura compendia petenda sunt ex regula trium simplici, & methodo inuentionis quarti proportionalis.

6. *Δοκιμασίαι* eædem sunt in duplici regula, quæ in simplici.

REGVLA SOCIETATIS.

πρότασις. Dato toto & datis quotcunque partibus: dabuntur etiam aliæ totidem partes proportionales, per regulam societatis.

Multi sunt casus huius regulæ. Datum enim totum aut est diuidendum aliquid simpliciter; aut in specie vel lucrum, vel damnum, vel legatum, vel hæreditas, vel tale quippiam.

ἐκθ. primi casus. *Sit datum totum 24: & data partes 3, 4, 5. Hic*

Hic dantur totum & partes sine materia.

Διορ. Oportet *24 distribuere in tres partes ita, ut sicut se habet 3 ad 4, & rursus 4 ad 5: sic prima pars ex 24 se habeat ad secundã: & rursus secunda ad tertiam.*

Κατ. *Primum collige datas partes in unam summam, eamq; pone in primo loco: datas vero partes seriatim sibi subiectas in secundo: totum, quid distribui debet in tertio. Iam sic dispositos numeros methodo regulæ trium tracta, hoc modo.*

Dispositio numerorum.

	3		6
12 —	4 —	24 —	8
	5		10
	12		24 δοκιμασία.

Operatio secundum regulam trium, ter repetita.

12. d. 3. Q. 24. D. 6.
12. d. 4. Q. 24. D. 8.
12. d. 5. Q. 24. D. 10.

Repetitio τῦ διορ. *Dico primam partem esse 6: secundam 8, tertiam 10: habere autem se 6 ad 8 ut 3 ad 4: rursus 8 ad 10, ut 4 ad 5.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia addit. Datis partibus dabitur totum earum per additionem. Hic partes sunt 3, 4, 5. Ergo totum earum est 12 per additionem. Hæc est causa additionis, ut nimirum inueniatur totũ collocandum primo loco.

2 Syll. 5. propos. 8. Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam, id est, eadem est ratio totorum ad se, quæ partium, ex quibus tota conficiuntur. Hic sunt duo tota 12, & 24 & partes unius sunt 3, 4, 5. Ergo quæ est ratio 12 ad 24 eadem est partium inter se.

3 Syll. sententia. Datis duobus totis, & partibus unius totius dabũtur partes alterius totius proportionales per regulam trium. Hic sunt duo tota 12 & 24: & partes unius totius 3, 4, 5. Ergo per regulam trium dabuntur totidem partes posterioris totius, hoc modo.

Eadem

12. d. 3. q. 24. d. 6.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 72 \\ 12\ (6. \\ 72 \end{array}$$

Eadem est ratio posteriorum duarum partium secundi totius, quæ respondent duabus posterioribus partibus prioris totius.

συμπέρ. Dato igitur toto & datis tribus partibus inuentæ sunt totidem partes proportionales alterius totius, *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. secundi casus. *Sint tres mercatores, qui collatis pecuniis negotiatione lucrati sunt ultra sortem florenos 500: sed primus contulit fl. 50: secundus 75: tertius 100.*

Διορ. *Quæritur quot floreni ex eo lucro, singulis pro sua collata pecunia debeantur?*

Κατ. *Collige sortes singulorum in unam summam, eamq; pone in primo loco: lucrum omnium in secundo: sortes singulorum seriatim sibi subiectos in tertio: & hinc quot sunt sortes, toties regulam trium repete, & inuenies lucra singulorum, hoc modo.*

Summa sortium.		Lucrum omnium.		Sortes singulorum		Lucra singulorum.
				50	....	$111\frac{1}{9}$.
225.	--- D. ---	500	Q.	75	-- D. --	$166\frac{6}{9}$
				100	....	$222\frac{2}{9}$.
				225.		500. Δοκιμασία.

Hic regula trium repetitur, propter totidem sortes trium mercatorum, dicendo sic. 225. d. 500, q 50, q. 75. q. 100.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico primo mercatori tribuendos esse fl. $111\frac{1}{9}$, secundo $166\frac{6}{9}$ siue $\frac{2}{3}$: $\frac{6}{9}$ autem retinemus propter commodiorem additionem in δοκιμασία: tertio $222\frac{2}{9}$.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ primi casus. Sunt enim hic duo tota, 225 & 500, quorum eadem est ratio, quæ partium ad se inuicem. Nam ratio totorum est $2\frac{2}{9}$ subdupla superbipartiens nonas. Eadem est ratio 50 ad $111\frac{1}{9}$: eadem 75 ad $166\frac{6}{9}$: eadem 100 ad $222\frac{2}{9}$: *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ.

ἐκθ. tertij casus *Tres mercatores iacturam faciunt 100 fl. in quibusdam mercibus: quorum primus contulit 300 fl. alter 400, tertius 500.*

Δ. *Quaeritur quantam singuli iacturam faciant?*

Κατασκ. *eadem est quae praecedentis casus. Nam & hic operationem antecedit additio sortium, ut habeatur numerus primo loco collocandus, quem sequitur damnum uniuersale, collocandum secundo loco: & tandem sortes singulorum tertio loco. Vt igitur supra inaequalia lucra nascebantur: ita hic inaequalia damna emergent, hoc modo.*

Summa sortium.		Damnum uniuersale.		Sortes singulorum.		Damna particularia.
				300		25
1200	D	100.	Q.	400	D	$33\frac{1}{3}$
				500		$41\frac{2}{3}$
				1200.		100. Δοκιμασία.

Repetitio τοῦ διορισ. *Dico iacturam primi esse florenorum 25: secundi $33\frac{1}{3}$: tertij $41\frac{2}{3}$.*

Ἀπόδειξις huius, ut & caeterorū casuum est eadem, quae primi casus. In omnibus enim exemplis datur unum totum, & partes cuiusdam totius: unde & alterum totum, & partes dati totius proportionales certa methodo innotescunt.

ἐκθ. quarti casus. *Quidam moriens legauit seruis duobus 300 fl. ea condicione, ut quoties alter quinos, toties alter senos acciperet.*

Δ. *Quaeritur, quot uterq; pro sua portione acceperit?*

Κατ. *Numeros eos, quibus diuidendi modus praescribitur, in unā summam collige, eamq; primo loco ad regulam pone pro communi diuisore: secundo loco florenos legatos: tertio ipsos numeros, hoc modo.*

11.	D.	300.	Q.	5	D.	$136\frac{4}{11}$
				6	D.	$163\frac{7}{11}$.
				Summa 11.		300. δοκιμ.

Hic 11 primo loco posita est summa numerorum.

Tt Repetis

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico primo seruo cessuros fl.* $136\frac{4}{11}$: *secundo* $163\frac{7}{11}$.

Ἐκθ. quinti casus. *Sint partiendi 3456 fl. inter tres proles, ea lege, ut prima capiat bonorum* $\frac{2}{3}$: *secunda* $\frac{5}{9}$, *tertia* $\frac{1}{2}$.

Δ. *Quæritur, quantum singulis de hæreditate pro rata parte sit cessurum?*

Κατ. *Principiò numerum inuenito, qui habeat partes datas, per doctrinam lib. 1. traditam de diuiduo minimo in diuisione, scholio 11. Secundo ex diuiduo minimo partes nominatas erue per diuisionem, easq́; tertio loco statue. Tertio partes nominatas collige in unam summam, quam primo loco colloca. Quartò secundum locum florenis diuidendis tribue. Quintò cætera ut supra per regulã trium perfice, hoc modo.*

				12 --- D. --	$1337\frac{25}{31}$.
31	D.	3456.	Q.	10 --- D. ---	$1114\frac{26}{31}$
				9 --- D. ---	$1003\frac{11}{31}$
			Summa	31.	3456.

Hic 18 est minimus diuiduus, qui omnes datos denominatores simul capit. Potest enim diuidi per 3, 9, 2. Iam $\frac{2}{3}$ *de 18 sunt 12, hoc modo. 1. d. 18. q.* $\frac{2}{3}$. *d. 12. Eodem modo* $\frac{5}{9}$ *sunt 10 :* $\frac{1}{2}$ *est 9. Harum partium summa est 31.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico primæ proli cessuros flor.* $1337\frac{25}{31}$: *secũdæ* $1114\frac{26}{31}$: *tertiæ* $1003\frac{11}{31}$.

Ἐκθ. sexti casus. *Floreni 200 tribus ea condicione diuidendi sunt : ut primus triplo plus habeat, quàm secundus : & secundus quadruplo, quàm tertius.*

Δ. *Quæritur quota pars sit singulorum?*

Κατ. *Tres sunt partes κατασκ. Prima, inuentio totius, quod in quæstione non ponitur, collocandi primo loco. Secunda, legitima dispositio : tertia operatio secundum regulam trium.*

Totum inuenitur incipiendo à tertio, qui est extremus. Is itaq́; habeat

habeat 1, ita secundus habebit 4, & primus 12. 4 enim est quadruplum primi, & 12 triplum secundi. Hac addita faciunt 17. Dispositio & operatio fit, hoc modo.

12 — $141\frac{3}{17}$

17. D. 200. Q. --- 4 --- D --- $47\frac{1}{17}$

1 — $11\frac{13}{17}$

17 — 200. Δοκιμ.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico ratam primi partem esse fl.* $141\frac{3}{17}$: *secundi fl.* $47\frac{1}{17}$: *tertij fl.* $11\frac{13}{17}$.

ἔκθ. septimi casus. *Mille floreni inter quatuor ea lege diuidendi sunt, ut quoties primus 2 accipit, toties secundus accipiat 3: & rursum quoties secundus 4, toties tertius 5: item quoties tertius 6, toties ultimus 7.*

Δ. Oportet *inuenire quotam partem singulorum.*

Κατ. *Totidem sunt partes κατασκευῆς huius, quot praecedentis. Totum collocandum primo loco inuenitur addendo datos numeros in unam summam prius reductas ad 4 continuè proportionales. Sunt autem dati minimi termini, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Qui reducti per 4 lib. 8. ad quatuor continuè proportionales faciunt 8, 12, 15, 105.*

Nam extremitates priorum duarum rationum 3 & 4: 3 praecedentis terminus posterior: 4 sequentis prior diuiduum minimum habent 12 (id quod mutua multiplicatio etiam ostendit.) Iam 12 diuisa per 3 procreant 4: eadem diuisa per 4 gignunt 3. Ex his duobus quotis in se ductis fiunt 12, terminus nouus ac medius, qui idem prioris rationis consequens, & posterioris antecedens sit futurus. Rursus 12 diuidatur per 3 & 4, numeros scilicet eos, qui eum procrearunt: & fient duo quoti 4 & 3. Iam 4 priore quoto ducto in 2 terminum priorem rationis antecedentem, fient 8, antecedens eius, qui iam in medio collocatus est: 3 vero, posteriore quoto in 5 consequentem posterioris rationis multiplicato prodeunt 15, terminus eiusdem rationis consequens, hoc modo, 8, 12, 15. Hactenus numeri fuerunt

inter se compositi: sequuntur nunc incompositi. Nam tertia rationis (quæ est inter 6 & 7) 6 antecedens ad posteriorem præcedentis, siue secunda, hoc est, ad 15 primus & incompositus est; ideoq́ præcedentes terminos mutare, & nouos inuenire oportet, ut omnes inter se consentiant. Inuenitur autem, ut antea: primum diuiduus minimus, quem metiantur 15 & 6, idq́ ductu unius in alterum: unde fiunt 90. Iam 90 diuisa per 15 procreant 6, per quem quotum superiores reliqui (quos hactenus inuenimus ex tractatione numerorum inter se compositorum) multiplicati terminos alios ac nouos, eosq́ proportionales generant, 48, 72, 90. Nam 6 in 15 ducta procreant 90: in 12, 72: in 8, 48: quibus quartus 105 accedit, procreatus ex ductu 7 in 15, quotum scilicet 90 per 6 diuisi. Eandem autem rationem habent in numeris compositis 3 ad 2, quam 12 ad 8, vel 72 ad 48. Et rursum 5 ad 4 quam 15 ad 12, vel 90 ad 72. Deniq; in numeris incompositis 7 ad 6 quam 105 ad 90. Quorum summa est 315, collocanda loco primo.

Hinc dispositio & operatio quadruplex per regulam trium sic se habet.

				48			$152\frac{24}{63}$
315.	D.	1000	Q.	72	D.		$228\frac{36}{63}$
				90			$285\frac{45}{63}$
				105			$333\frac{21}{63}$
			Summa	315.			1000. δοκιμασία.

Nam pro primo ducitur 48 in 1000, unde emergunt 48000, quæ diuisa per 315 procreant $152\frac{120}{315}$: reducta vero ad minimos terminos $\frac{24}{63}$. Et sic de alijs.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico partem quotam primi esse florenos $152\frac{24}{63}$: secundi $228\frac{36}{63}$: tertij $285\frac{45}{63}$: quarti $333\frac{21}{63}$.*

σχόλιον.

1. Regulæ societatis varia sunt nomina. Appellatur enim & regula societatis, & consortij, & rei herciscundæ, Germanis gesellschafften.

ſchaffren. Quidā regulā iuſtitiæ & politiæ appellare malunt. Societatis dicitur, quod communia lucra & damna ſociorum iudicat. Conſortij, quod ſortes diuerſas, quas ſocij contulerunt, inter ſe confert, & ratam partem lucri & damni pro diuerſitate ſortium ſingulis diſtribuit. Eandem ob cauſam etiam regula iuſtitiæ vocatur. Æquium enim eſt, ut qui plus contulit, plus etiam de cōmuni lucro accipiat: nec iuſtum eſt, ut communis iactura uniuerſos æqualiter premat. Herciſcere autem veteres dixerunt id, quod eſt diuidere: unde & actio familiæ herciſcundæ apud Iuriſconſultos appellatur. Regulam iuſtitiæ quidam appellare malunt, quod non ſolis mercatoribus, ſed cuiuſcunque ſtatus hominibus conueniat. Arithmetici aptius vocant proportionem compoſitam per additionem.

2. Sors eſt prima pecunia, cui ſupercurrit fænus: ſeu pecunia collocata ad uſuram, Germ. die hauptſumm.

3. Quod ſi occurrant exempla, in quibus per lucrū vel detrimentum notum ſors ignota exquiritur: id per extractionem radicis quadratæ ex producto datorum numerorum inuenitur. Sors ignota, ut. Depoſitis florenis 36 quidam lucrati ſunt ſumām ignotam. Hac ſumma deinceps ceu ſorte depoſita, eadem ratione lucrati ſunt fl. 81. Quæritur quantum fuerit lucrum prius, ſeu ſumma ſecundo loco poſita. Modus operationis eſt hic.

Duc numeros datos, veluti terminos extremos, unum in alterum: & ex producto accipe radicem quadratam, hoc modo. 36 ducta in 81 procreant 2916: quorum radix quadrata eſt 54 lucrum ignotum exhibens. Nam ex lucro fit ſors, hoc modo. 36. D. 54. q. 54. d. 81. Eadem eſt damni ſupputandi ratio. Operatio demonſtratur per 10. lib. 7. Si tres numeri proportionales fuerint: qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur.

4. Regulæ ſocietatis cognata eſt ea mercatura, quam Germani *factorey* vocant, quod inter ſocios & procuratores negociorum exerceatur: *cuius exemplum ſit tale.* Duo ſocietatem coierunt, quorum primus in medium attulit fl. 164: ſecundus fl. 282, quos uni curatori tradunt, ut ijs negocietur, tanquam ſuis: promittunt autem eidem quartam partem lucri, quodcunque ex illa ſorte collata fecerit. Lucratur autem florenos 120. Quæritur quantum de illis tum procuratori, tum ſocijs competat? Competent autem procuratori fl. 30: primo ex ſocijs fl. $33\frac{21}{223}$. Secundo fl. $56\frac{202}{223}$, hoc modo. Quarta pars lucri ſunt fl. 30. Nam 120 diuiſis per 4, fiunt 30, quæ detracta à 120 relinquunt 90. Diſpoſitis igitur ad regulam trium numeris inuentio lucrorum, ſecundum artem facile erit ſic.

446. D. 90. q. $<\begin{matrix}164\\282\end{matrix}$ D. $33\frac{21}{223}$ / $56\frac{202}{223}$.

Summa 446. Summa 90.

5. Δοκιμασία duplex est: vulgaris & erudita. *Vulgaris* est additio numerorum quarto loco positorum. Nam si numerum medio loco positum præcisè instaurant, veram operationem arguunt, ut in præcedenti exemplo summa numerorum quarto loco positorum est 90. Eadem est quantitas numeri medio, siue secundo loco positi. Hoc vero examen infirmum est, & cum maximo detrimento mercatoribus potest imponere. *Erudita* igitur & vera probatio pendet ab æqualitate rationum in partibus: ut in præcedenti exemplo, si $33\frac{21}{223}$ ad $56\frac{202}{223}$ eam habuerint rationem, quam 164 ad 282, nullum errorem in calculo admissum esse, indicium erit certissimũ.

REGVLA DE INTERCAPEDINE diuersi temporis in consortio.

πρότασις. Dato toto & datis partibus circumstantia aliqua definitis: dabuntur etiam totidem partes proportionales per regulam trium.

Tres sunt casus huius regulæ. Datur enim aut tempus omnium cum sorte, & ignoratur lucrum: aut scitur lucrum, tempus autem omnium sociorum ignoratur: aut non tempus datur, sed alia circumstantia.

ὑπόθ. primi casus. *Tres negociatores societatem coierunt: quorũ primus contulit fl. 20 per menses 8: secundus fl. 40, per menses 6: tertius fl. 50 per menses 4: communiq; nomine lucrati sunt fl. 100.*

Δ. *Cupio scire, quantum pro sua cuiq; & temporũ & sortis ratione debeatur?*

Κατασκ. *Primum multiplica sortem cum suo tempore, & redige numeros ad dispositionem regulæ trium directam: collocando summam antea inuentam tertio loco. Secundo adde producta, nota ex multiplicatione, & pone summã exeuntem primo loco: lucro deniq; in medium posito, operationem, ut in regula societatis, institue, hoc modo.* *Summa*

Summa.	*Lucrum.*	*fl. menſ.*	*Producta.*	*Lucra ſing.*
		20 — 8	*160*	*26⅔*
600. D.	*100. Q.*	*40 — 6*	*240. D.*	*40*
		50 — 4	*200.*	*33⅓.*
	Summa		*600.*	*100.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico primo ex ſocijs deberi fl. 26⅔ : ſecundo fl. 40 : tertio fl. 33⅓.*

Ἀπόδειξις eſt eadem quæ regulæ duplicis, cui cognata eſt. Vt enim ſe habet regula duplex ad regulam triũ : ita regula de intercapedine temporis diuerſi ad regulam ſocietatis. Nam & hic forti circumſtantia quædam adijcitur : eamque ob cauſam, ut illic, ita hic quoq; diuerſi numeri in quæſtione collocati multiplicatione in unam ſummam rediguntur : reducti ſuo loco collocantur, *quod fecisse oportuit.*

ἐκθ. ſecundi caſus. *Tres in eadem ſocietate lucrati ſunt fl. 500. Ac primus ſortem contulit fl. 36 per menſes 10 : ſecundus 48 : tertius 60, tempore ignoto : mox autem facta diuiſione primus ex eodem lucro accepit 100 : ſecundus 160 : tertius 240.*

Διορ. *Quæritur quanto tempore poſtremorum pecunia in communi uſu poſita fuerit?*

Κατ. *Primum multiplica ſortem primi cum ſuo tempore, ut in primo caſu, & productum pone medio loco, lucrum eiuſdem primo loco : lucrum ſecundi tertio loco : & hinc ex tribus datis methodo regulæ trium quartum inuenito, qui oſtendet numerum, quem ſors & tempus inter ſe multiplicata producunt, pro ſecundo. Rurſus pro tertio colloca eundem numerum, quem ante primo loco : ſecundum item ſecundo loco : lucrum tertij tertio loco, & operationem ex regula trium inſtitue, unde prodibit numerus, quem ſors & tempus in ſe ducta producunt, pro tertio. Tandem ex utroq; numero quantitatem temporis ſeorſim extrahe, utrumq; illorum per ſortem ſuam diuidendo. Dato enim producto duorum numerorum, & uno numero, numerus alter per diuiſionem dabitur, hoc modo.*

Lucrum.

Prima operatio per regulam Tr.

Lucrum.		*Fl.*	*Mens.*	*Lucr.*	*Num.*
100.	*D.*	*36.*	*10.*	*160.*	*576.*

360 (36 × 10)

160
360
———
9600
48
———
576 | 00 (*576.*
1 | 00

Secunda operatio per regulam Tr.

Lucr.		*Num.*		*Lucr.*	*Num.*
100.	*D.*	*360.*	*q.*	*240.*	*864.*

240
360
———
14400
72
———
864 | 00 (*864.*
1 | 00

Tertia operatio per diuisionem.

Menses. *Menses.*

576 (*12.* *86 | 4* ($14\frac{24}{60} | \frac{2}{5}$.
48 *6 | 0*

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico secundi sortem fuisse in communi usu per menses 12 : tertij per menses* $14\frac{2}{5}$, *id est, menses 14, dies 12.*

ἐκθ. tertij casus. *Legio habet pedites 6100 : equites 726 : & peditis stipendium est 4 fl. equitis 9. Inter hos diuidenda est praeda 2000 fl.*

Δ. *Quaeritur quantum singulis debeatur?*

Κατ. *est eadem quae primi casus, hoc modo.*

Pedi-

fl.

30934. D. 2000. Q. Pedites 6100. 4. 24400. D. $1577\frac{17082}{30934}$.
Equites — 726. 9. 6543 $422\frac{13852}{30934}$.
Summa — 30934.

Repetitio τῦ διορ. *Dico peditibus deberi fl.* $1577\frac{17082}{30934}$. *Equitibus fl.* $422\frac{13852}{30934}$. σχόλιον.

1. Regulam de intercapedine diuersi temporis in consortio quidam appellant multiplicem proportionem multiplicatione & additione compositam: alij regulam secundam societatis: alij regulã consortij diuersi temporis.

2. Vbi nulla fit mentio temporis, ibi negociatio æquali tempore facta intelligitur. Consideratio autem temporis necessaria est, ut seruetur æqualitas, quam pecuniæ & temporis ratio exigit.

3. Regulæ consortij diuersi temporis cognata est regula virginũ, sic appellata, quod virginum personæ inter quædam illius exempla reperiantur: hoc modo Inter 12 personas diuidenda est summa 36 florenorum, ea lege, ut viri senos: mulieres quaternos: virgines autem singulæ binos accipiant. Quæritur igitur quot cuiusq; sexus personæ seorsim ac singulatim fuerint, & quantum singulæ acceperint? Fuisse autem viros duos: mulieres totidem, & virgines octo, & viros 2 accepisse fl. 12: mulieres duas fl. 8: virgines 8 fl. 16. ex sequenti duplici supputatione apparet.

PRIMA.

Pers.		Partes.		Fl.		Pers.	
		6					
12.	d.	4.	Q.	36.	C.	Viros	2 ---
		2				Mul.	2 ---
						Virgines	8 ---
							12.

SECVNDA.

							fl.
	Vir.		6.		Viri 2.		12.
1.	Mulier	D.	4.	Ergo	Mul. 2.	D.	8.
	Virgo		2.		Virg. 8.		16.
						Summa	36.

Hic summa personarum priorem: nomina partium medium: summa pecuniæ diuidendæ tertium locum obtinet. Deinde ex medijs numerus minimus subtrahitur à singulis & à seipso sic.

Vu Residua

6.	4.	2.
2.	2.	2.
4.	2.	0.

Residua hæc. 4. 2. 0. sunt diuisores, qui è regione cuiusque eo ordine, quo subtractio facta est, notantur, hoc modo.

	6		4
12	4	36	2
	2		0

Tertio 12 numerus personarum primo loco positus ducitur in 2, numerum medij loci minimum, & fiunt 24: quæ subtracta à 36, summa pecuniæ generali, relinquunt 12.

Quartò 12 residuum per diuisores 4,2,0 singulatim diuiduntur, ita tamen ut post prioris diuisionem semper aliquid relinquatur, à posteriore deinceps diuidendum, donec ad ultimum perueniatur. Iam 12 hac lege diuisa per 4 priorem diuisorem, procreant 2 pro numero virorum. Nam 4 in 12 habetur bis, & relinquuntur 4. (si ter sumatur, nihil relinqueretur.) Rursus 4 residua diuisa per 2, alterum diuisorem procreant etiam 2, pro numero mulierum (si unitatem sumeremus, residuum inutile esset, eo quod postea unus numerus & 0 est, & aliam operationem requirit.) Quoti enim ex hac diuisione collecti cuiusque generis personas indicant, excepto genere ultimo, cuius numerum monstrat residuum ortum ex prioribus quotis inter se additis & subtracto producto à numero personarum generali. Iam 2 & 2 (quæ constituunt numerum virorum & mulierum) addita faciunt 4, quæ subtracta à 12 relinquunt 8, numerum virginum.

4. Est & regulæ consortij diuersi temporis cognata regula, anatocismi Iudaici, quam usurariam Latini, Germani Judenrechnung & subzinß vocant: *cuius exemplum sit hoc.* Quidam Iudæorum in sortem dedit alicui Christianorum florenos 100, qui annua usura pariant 25: usuram autem usuræ quinto demum anno elapso petit. Quæritur quantum usura superiorum annorum (quæ quia præstita non fuit, in sortem conuersa est.) secundum eandem rationem pariat? Pariet autem usuram florenorum $205\frac{45}{256}$, hoc modo.

Primùm usuram ad numerum sortis adijcio, & fiunt 125: hæc summa cum 100, id est, sorte collata rationem sesquiquartam constituit, qualis est inter 4 & 5. Iam quatuor alios Geometrica progressione secundum eandem rationem primo superaddo, tot nimirum quot sunt excepto primo annorum usuræ in proposita quæstione numeratæ quater pro quatuor annis repetendo regulam trium sic.

Tandem

	125.	d.	$156\frac{1}{4}$.	secundo anno.
4. d. 5. q.	$156\frac{1}{4}$.	d.	$195\frac{5}{16}$.	tertio.
	$195\frac{5}{16}$.	d.	$244\frac{9}{64}$.	quarto.
	$244\frac{9}{64}$.	d.	$305\frac{45}{256}$.	quinto.

Tandem principalis sors ab ultimo subtracta relinquit usuram quinquennij $205\frac{45}{256}$. Nam $305\frac{45}{256}$ sunt sors & ἀνατοκισμὸς quinquennij simul.

Quod si rursus ex ἀνατοκισμῷ & data ratione inter sortem & usuram, sortem colligere voles, illam sic inuenies. Sume numerum quemcunque pro sorte, eumque secundum eandem rationem, quæ est inter sortem & usuram, continua ad tot numeros progressionis Geometricæ, quot sunt numeri annorum quibus usura præstita non fuit. Sit autem in nostro exemplo pro 100, 256, sors primi anni. Erit igitur sors secundi anni 320, tertij 400, quarti 500, quinti 626: sextus autem usura & sors quinti, $781\frac{1}{4}$. Iam tres terminos ad regulam trium sic dispone. $781\frac{1}{4}$ quintus annus siue terminus usuram cum sorte produxit $305\frac{45}{256}$, quantum parient 256, qui fuit terminus, siue annus usuræ primus? Faciet quotus 100, numerum sortis principalis. Nam $305\frac{45}{256}$ per 256 multiplicata producunt 78125, quæ rursus per $781\frac{1}{4}$ siue $\frac{3125}{4}$ diuisa reddunt quotum $\frac{312500}{3125}$, hoc est 100.

5. Δοκιμασία regulæ consortij diuersi temporis fit aut per collationem quarti inuenti cum summa medij, cum qua quartus congruere debet: aut per æqualitatem rationum, in duabus partibus, ut in regula societatis. In regula vero virginum summa quartorum secundæ operationis est æqualis numero, tertio primæ operationis. Exempla regulæ usurariæ probat conuersa operatio, qua ex usura & data ratione inter sortem & usuram sors colligitur, quæ si congruat cum data sorte veram operationem arguit.

REGVLA ALLIGATIONIS.

Πρότασις. Datis quibusdam precia mistarum mensurarũ, precijs simplicium mensurarum æquare.

Duo sunt præcipui casus. Medium enim, quod æquatur, aut datur, aut quæritur. Datur, cum extrema quæruntur: quæritur, cum extrema dantur. Rursus, aut dantur duo extrema cum medio, aut

tria, aut plura, eaq́ vel æqualia, vel inæqualia. Et iterum medium datur cum numero mensuræ unius vel plurium: & rursus aut sine aut cum uno quæsito tantum.

ὑπθ. primi casus. *Oenopola duplex uinum habet: primi mensura valet 6 cr. secundi 12 cr. vult autem ex duobus generibus miscere unam mensuram, quæ valeat 10 cr.*

Δ. *Quæritur quantum sit miscendum præstantioris ac vilioris vini? Hic dantur duo extrema cum medio & numero unius mensuræ: & quæruntur partes rerum miscendarum.*

Κατ. *Duæ sunt partes operationis, prima, alternatio differentiarum: secunda reductio plurium numerorum ad tres: tertia operatio per regulam societatis. Alternatio differentiarum fit hoc modo.*

1. Ordina precia rerum commiscendarum incipiendo à minoribus, & ordine procedendo ad maiores. Hos numeros vocant alligandos.

2. Subijce, vel supernè impone vel ad latus colloca propositum in quæstione precium rei, quam constituisti mixtione ex superioribus conficere. Hunc numerum vocant medium.

3. Ordinatis sic numeris, binos subinde extremos ad medium alliga, hoc est, differentiam inter medium & minorem numero maiori: & rursus differentiam inter medium & maiorem numero minori adscribe: idq́ eo usq́ dum singuli cum altero aliquo ad medium alligentur. Differentiæ indicant res simplices, earumq́ quantitatem in mensuris.

Reductio plurium numerorum ad tres fit hoc modo. Adde differentias, & summam colloca primo loco. Summa indicat rem mixtã, & compositam, eiusq́ quantitatem in mensuris. Secundo loco pone differentias separatim scriptas: tertio loco quantitatem mensuræ in quæstione positam.

Numeris ita dispositis fit multiplicatio & diuisio, perinde ut in regula societatis, hoc modo.

Alterna-

Alternatio differentiarum.

Precia. Differ.

Medium 10 < 12 X 4. *Defectus.*
6 X 2. *Excessus.*

Summa 6.

Reductio plurium ad tres.

Summa diff.		*diff.*		*Mens.*
6.	d.	4.	q.	1.
6.	d.	2.	q.	1.

Operatio duplex est hac. *Prima.* 6. d. 4. *Ergo* 1. d. $\frac{2}{3}$.
Secunda. 6. d. 2. *Ergo* 1. d. $\frac{1}{3}$.

Repetitio τῦ διος. *Dico unam mensuram de utroq; vino mixtā continere $\frac{2}{3}$ unius mensura de vino preciosiore : & $\frac{1}{3}$ unius mensura de vino vitiore: siue sex mensuras de utroq; vino mixtas recipere 4 mensuras simplices de vino preciosiore : duas autem simplices de vino viliore.*

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. Datis numeris extremis dantur differentiæ per subtractionem,& æquatio extremorum cùm medio per plus & minus. Hic dantur duo extrema, 12 & 6 : & medium est 10. Ergo dantur differentiæ per subtractionem 4 & 2: & æquatio cum medio per plus & minus. Itaque 12 æquatur 10 + 2 : & 6 æquatur 10 -- 4.

2 Syll. sententia. Quod maioris excessum æquat medio,id maiori adscribi debet.

Minoris defectus maioris excessum æquat medio.

Ergo minoris defectus maiori adscribitur.

Hæc est causa alternationis differentiarum.

3 Syll. sententia. Excessus & defectus preciorum est quantitas seu valor rerum simplicium miscendarum.

Differentia inter medium & extrema est excessus & defectus preciorum.

Ergo differentia inter medium & extrema est quantitas seu valor rerum simplicium, quæ miscentur.

4 Syll. sententia additi. Datis partibus dabitur totum per additionem. Differentiæ inter medium & extrema sunt partes. Ergo totum earum per additionem est 6,tota quantitas rei mixtæ, cuius portiones sunt 4 & 2.

 5 Syll.

5. Syll. sententia regulæ trium. Si quid scitur de pluribus, scietur etiam de uno per regulam trium. Hic scitur sex mensuras de utroq; vino mixtas recipere 4 mensuras de vino viliore: duas autem de vino preciosiore. Ergo per regulam trium scitur, quantum una mẽsura recipiat de utroque vini genere, *quod inuenisse oportuit.*

Δοκιμασία est hæc. Precium vini commixti est 10 cr. Tantum est etiam precium duorum vini generum. Vna enim mensura preciosioris vini valet 12 cr. Ergo $\frac{2}{3}$ valent cr. 8. Rursus una mensura vilioris vini valet cr. 6. Ergo $\frac{1}{3}$ valet cr. 2. Iam 8 & 2 collecta faciunt 10.

ἐκθ. secundi casus. *Oenopola duplex vinum habet: unum precij sex: alterum 12 crucif. vult autem ex duobus generibus miscere sex mensuras, quarum singula valeant 10 cruciferos.*

Διορ. *Quaritur, quot mensuras è singulis generibus haurire debeat? Hic dantur duo extrema cum medio, & numerus mensurarum plurium.*

Κατ. *est eadem hic, quod ad alternationem differentiarum & operationem attinet, cum præcedenti casu, hoc modo.*

Alternatio differentiarum medij.

10   *6* ╲╱ *2*   *Defectus.*
     12 ╱╲ *4*   *Excessus.*

Summa 6.

Reductio plurium terminorum ad tres, & operatio. 6. d. 6.
Ergo 2. d. 2.
4. d. 4.

Hic summa differentiarum primo loco ponitur: secundo datus numerus mensurarum: tertio numerus differentiarum separatim.

Repetitio τοῦ διορισμοῦ. *Dico duos cantharos precij 6, & 4 cantharos precij 12 hauriendos esse.*

Ἀπόδειξις *est eadem, quæ præcedentis casus.*

Σχόλιον. Hinc apparet, si numerus datus mensurarum sit æqualis summæ differentiarum, numeros differentiarum esse numeros mensurarum simplicium.

ἐκθ.

Ἐκθ. tertij casus. *Sint quatuor genera aromatum miscenda ad quingentas uncias, piper, saccharum, cinnamomum, & zinziber. Vncia piperis valet 25: sacchari 24, cinnamomi 22; zinziberis 18. Vncia vero aromatis misti futura sit precij 23 cr.*

Δ. *Quaeritur, quot uncias de singulis generibus sumere oporteat? Hic extrema plura sunt, eaq; numero paria: & medium cum numero plurium mensurarum.*

Κατ. *eadem, quae praecedentis casus. Quod autem ad alligationem attinet, id hoc loco obseruandum, ut, cum extrema numero paria sint, singula cum medio semel tantum comparentur, hoc modo.*

ALLIGATIO.

	Precia.	Differ.	
	25	5	*Excessus.*
Medium 23.	24	1	
	22	1	*Defectus.*
	18	2	
	Summa differ.	9.	

DISPOSITIO ET OPERATIO.

	5		$277\frac{7}{9}$
	1		$55\frac{5}{9}$
9. D. 500. *Ergo*	1	D.	$55\frac{5}{9}$
	2		$111\frac{1}{9}$
			500

Hic summa differentiarum primum locum obtinet: secundum numerus datus unciarum: tertium singulae differentiae seorsim: indeq; quarti secundum methodum regulae trium concluduntur.

Repetitio τοῦ διορισμ. *Dico in hoc exemplo misceri posse uncias piperis $277\frac{7}{9}$: sacchari $55\frac{5}{9}$: cinnamomi totidem: zinziberis $111\frac{1}{9}$.*

Ἀπόδειξις est eadem, quae praecedentium casuum.

Δοκιμασία in praemissa praxi habetur, in qua summa quartorum, cum numero quem locus secundus occupat, congruit. Hoc enim est argumentum non admissi erroris.

ἐκθ.

Ἐκθ. quarti caſus. *Sint mellis genera tria: libra unius valeat 8: alterius 14: tertij 18. Hæc ita miſcenda ſunt, ut una libra ſit precij 11 blappardorum.*

Δ. *Quæritur, quantum ſit miſcendum de ſingulis tribus generibus? Hic dantur extrema plura, eaq́; inæqualia, ſic ut ordo ſuperior ſit minor ordine inferiore.*

Κατασκ. *eadem, quæ præcedentium caſuum. Quod autem ad alligationem attinet, ſi extremorum ordines, ſuperior & inferior inæquales fuerint: & unus plures, alter pauciores numeros habuerit: tum medium ſæpius alligatur: & differentiæ uni, eidemq́; extremo plures adſcribuntur. Totum autem è multis differentijs eidem extremo attributis pro una differentia ſumitur, hoc modo.*

ALLIGATIO.

	Precia.	Differ.			
	8.	7.	3.	10.	Exceſſus.
Medium 11.	14.	3.			Defectus.
	18.	3.			
Summa diff.		16.			

Hic extremum ſuperius unicum eſt 8: extrema inferiora duo ſunt 14 & 18. Medium igitur 11 alligatur primum duobus infimis 14, & 18: unde ſiunt differentiæ 7 & 3 adſcribendæ ſuperiori numero, pro quibus 10 ſumimus. Rurſus idem medium alligatur cum duobus extremis 8 & 14, unde differentiæ ſiunt 3 & 3 adſcribendæ duobus inferioribus. Hic 11 bis alligatur ad 14: ſemel vero ad 8, & ſemel ad 18.

DISPOSITIO ET OPERATIO.

10 ———————— $\frac{5}{8}$.

16. d. 3 q. 1. D. $\frac{3}{16}$.

3 ———————— $\frac{3}{16}$.

Repetitio τῆς δεῖξ. *Dico unam menſuram de triplici genere mellis mixtam continere $\frac{5}{8}$ unius menſuræ precij 8: $\frac{3}{16}$ precij 14: & totidem*

tidem precij 18: siue 16 mensuras de triplici melle mixtas recipere 10 mensuras mellis precij 8: tres precij 14: totidem precij 18.

Ἀπόδειξις est eadem, quæ superiorum casuum.

Δοκιμασία fit explorando, num precia mistarum mensurarum, precijs simplicium mensurarum æquentur. Est autem precium mellis mixti 11 blap. Tantum est etiam precium trium generis mellis simplicium, hoc modo.

1. d. 8. Ergo $\frac{5}{8}$ d. 5.
1. d. 14. Ergo $\frac{3}{16}$ d. $2\frac{5}{8}$.
1. d. 18. Ergo $\frac{3}{16}$ d. $3\frac{3}{8}$.

Iam 5, $2\frac{5}{8}$, $3\frac{3}{8}$ addita constituunt 11.

ἔκθ. quinti casus. *Oenopola sextuplex vinum ad 315 mensuras miscuit: primi vini mensura valet 4 cr. secundi 6: tertij 9, quarti 10: quinti 12, sexti 18: mensuram vini misti vendit 11 cr.*

Δ. Oportet *inuenire, quot mensuras vini primi, quot secundi, quot reliquorum generum mensuras commiscuit? Hic dantur extrema plura, ut ordo superior sit maior ordine inferiore.*

Κατασκ. *eadem est, quæ præcedentis casus, quod ad alligationem attinet: nec alia quod ad dispositionem & operationem, quàm priorum casuum, hoc modo.*

ALLIGATIO.

	Precia.	Differ.	
	4	7	
	6	7	
	9	7	
11	10	7. 1.	8.
	12	1.	
	18	7, 5, 2, 1.	15.
		Summa	45.

Hic extrema superiora sunt 4: inferiora 2. Medium igitur 11 alligatur primum postremo 18, unde fit differentia 7, adscribenda seorsim quatuor numeris superioribus. Rursus idem medium alliga-

tur quatuor superioribus, 4, 6, 9, 10: unde fiunt differentiæ 7, 5, 2, 1. quarum summa est 15. Denique idem medium alligatur duobus contiguis 10, & 12, unde fit differentia 1 & 1, quæ permutatim scribuntur. Hic 11 bis alligatur ad 10: semel vero ad 12, & cæteros numeros.

DISPOSITIO ET OPERATIO.

Summa different. Mens. Mens.

45 --- D. 315. q. 7 D. 49

7 49

7 49

8 --- D. --- 56

1. 7. 1 --- D. --- 7

15 -- D. -- 105

Summa 315.

Pro 45 & 315 sumenda sunt 1 & 7 pro primis numeris, compendij gratia. Sunt enim numeri eiusdem rationis.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico unam mensuram de sextuplici genere vini mixtam continere 49 mensuras precij 4: totidem precij sex: totidem precij 9: 56 mensuras precij 10: 7 precij 12: 105, precij 18.*

Ἀπόδειξις est eadem, quæ superiorum casuum.

Δοκιμασία fit vel ex definitione alligationis, ut in præcedenti exemplo: vel additione numerorum quotorum. Nam si summa additorum eum numerum reddat, qui ab initio propositus fuit, nullum operando irrepsisse errorem demonstrat. Ita autem se rem habere ex praxi prius posita apparet.

Ἐκθ. sexti casus. *Mercator quadruplex gossypium habet: libra primi valet cr. 20: secundi 16: tertij 14: quarti 12. De eo quod cr. 16 valet, sumsit libras 33.*

Διορ. *Cupio scire, quot libras è cæteris generibus addere debeat, ut unum saccum ex illis mixtum conficiat, cuius singula libra valeant cr. 15. Hic dantur quatuor extrema cum medio, & uno quæsito: reliqua tria quæruntur.*

Κατ.

KAT. *Reductio plurium numerorum ad tres fit alterna subtractione preciorum à medio: & additione differentiarum. Deinde disponantur numeri, hoc modo. Primum locum occupet differentia cum respondente precio goßypij in quæstione proposito: secundum differentia cum precio, quod æquè distet à medio, ut prius: tertium datus librarum numerus. Erit igitur in dato exemplo reductio plurium numerorum ad tres, hoc modo.*

1. Precia librarum goßypij quadruplicis sunt ordinata, hoc modo, 12, 14, 16, 20.

2. Subijciatur precium librarum goßipij ex superioribus commiscendi. Est autem 15.

3. Capiantur differentiæ inter medium, & alligandos alternè, & erunt 3, 1, 1, 5, sic.

12,	14,	16,	20.	Precia.
	15.			Medium.
5.	1,	1,	3.	Differentiæ.

quarum summa 10.

Inuentio quartorum triplici proportione concluditur sic.

Prima proportio sic.

lb.	Pr.		lb.	Pr.		lb.	Pr.		lb.	Pr.
1.	16.	D.	1.	14.	q.	33.	16.	D.	33.	14.

Operatio per duas positiones est hæc.

	lb.		lb.		lb.		lb.
Prima.	1.	D.	1.	q.	33.	D.	33.
	Pr.		Pr.		Pr.		
Secunda.	16.	D.	14.	q.	16.	D.	14.

Secunda proportio sic.

lb.	Pr.		lb.	Pr.		lb.	Pr.		lb.	Pr.
1.	16.	D.	3.	20.	q.	33.	16.	D.	99.	20.

Operatio per duas positiones est hæc.

	℔.		℔.		℔.		℔.
Prima.	*1.*	*d.*	*3.*	*q.*	*33.*	*d.*	*99.*
	Pr.		*Pr.*		*Pr.*		
Secunda.	*16.*	*d.*	*20.*	*q.*	*16.*	*d.*	*20.*

Tertia proportio sic.

℔.	Pr.	℔.	Pr.	℔.	Pr.	℔.	Pr.
1.	16. d.	5.	12. q.	33.	16. d.	165.	12.

Operatio per duas positiones est hæc.

	℔.		℔.		℔.		℔.
Prima	*1.*	*d.*	*5.*	*q.*	*33.*	*d.*	*165.*
	Pr.		*Pr.*		*Pr.*		*Pr.*
Secunda.	*16.*	*d.*	*12.*	*q.*	*16.*	*d.*	*12.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico sumtis lanæ xylinæ 33 libris, precij 16, posse addi libras 33 precij 14: libras 99, precij 20: & 165 lib. precij 12, ut mista libra valeat 15 cr.*

Ἀπόδειξις est eadem quæ superiorum casuum.

Δοκιμασία facilima fit hoc modo. Summa librarum est 330. Valent autem lib. 33, precij 16, cr. 528: totidem precij 14, cr. 462: 99, cr. 1980, 165, cr. 1980: quæ collecta faciunt 4950. Iam sic dico.

330. d. 4950. q. 1. d. 15, numerus initio datus.

ἔκθ. septimi casus. *Sint duo scaphi frumenti, unus siliginis fl. 7: alter farris fl. 4. Vnus autem alteri misceri debet, ut genus tertium, idq; mixtum fiat.*

Δ. Oportet *precium unius scaphi ex utroq; genere mixti inuenire. Hic extrema dantur, & quæritur medium.*

Κατασκ. *est contraria κατασκευῆς casuum superiorum, hoc modo. Adde primum datarum mensurarum numeros, unde fiet summa, quam primo loco colloca. Deinde multiplica mensuras cum precijs, & productum pone secundo loco. Tertio loco numerum in quæstione positum, sic.*

1. Vnus scaphus additus alteri facit 2.

2. Vnus

2. Vnus scaphus ductus in 7, producit 7: sic ductus in 4, procreat 4: quæ addita constituunt 11.

3. Numerus in quæstione positus est 1. Iam sic dico.

2. d. 11. q. 1. d. $5\frac{1}{2}$.

Repetitio τῦ διος. *Dico precium scaphi unius ex siligine & farre mixti constare fl.* $5\frac{1}{2}$.

Ἀπόδειξις διὰ ἰνός.

Sententia regulæ trium. Si quid scitur de pluribus, scietur etiam de uno: per regulam trium. De 2 scaphis scitur quòd valeant fl. 11. Ergo per regulam trium unus scaphus ex utroque mixtus constabit fl. $5\frac{1}{2}$: *quod demonstrasseo portuit.*

Δοκιμασία fit per definitionem alligationis. Alligatio enim est, cum precia mistarum mensurarum precijs simplicium mensurarum æquantur. Est autem precium mistarum mensurarum $5\frac{1}{2}$. Tantum est etiam precium duorum frumenti generum, hoc modo.

Vnus scaphus preciosioris frumenti valet fl. 7.
Ergo dimidius scaphus facit fl. $3\frac{1}{2}$.
Alter scaphus vilioris frumenti valet fl. 4.
Ergo dimidius scaphus facit fl. 2.
Iam 2 & $3\frac{1}{2}$ addita conficiunt $5\frac{1}{2}$.

σχόλιον.

1. Alligatio est excessus & defectus inuestigatio, per quam variæ res miscentur, ut totum precium mistarum partium, toti ex omnium simplicium precijs æquale fiat & proportionale. Sic dicta, quòd varias merces ad unum precium quasi alliget: vel numeros plures uni alicui alliget, hoc est, ad unum referat.

2. Vsus igitur illius tantum circa numeros contractos versatur: ut sunt res physicæ, solida & liquida. Solida, ut grana, metalla, lanæ, aromata. Grana, ut hordeum, triticum, secale auena, oryza. Metalla, ut aurum, argentum, stannum, orichalcum, ferrum, plumbum, æs. Lanæ, ut xylina, ouilla. Aromata, ut zinziber, piper, crocus. Liquida, ut aqua, mel, cera, butyrum, vinum, lac.

3. Medius numerus est minor maiore: & maior minore. Medius igitur dicitur, non quod præcisè sit medius, sed quia nunquam potest, nec debet esse minor dato minimo, neque maior dato maximo.

4. Extrema enim dantur semper, eius condicionis, ut una pars sit

medio maior: altera minor. Quæſtio igitur alligationis eſt impoſſibilis, ſi reperiatur precium non medium, id eſt, vel minus precio vilioris: vel maius precio præſtantioris.

5. Naturæ conſentaneum eſt, ut ex rebus vilioris & præſtantioris precij miſceatur tertium quiddam melius viliore, & vilius meliore.

6. Generalis alligationis proprietas menſuras eius ſpeciei: precium autem menſuræ miſtæ inter precia menſurarum ſimplicium quantitate medium eſſe poſtulat. Sic ſcaphi ſunt eiusdem ſpeciei cum ſcaphis: precium autem ſcaphi mixti quantitate medium erit inter precia, maius & minus.

7. Si res alligandæ plures ſunt, quàm duæ: varijs modis fieri poteſt alligatio: dummodo precium medium ſemper ſit minus uno precio alligando, & maius altero, vel eidem æquale. v. g. in exemplo quinti caſus, medium 11 fuit alligatum quater uni extremo 18, unde exierunt differentiæ quatuor 7, 7, 7, 7. Rurſus idem medium eſt alligatum ad quodlibet extremum ſuperioris ordinis: unde exierunt differentiæ quatuor 7, 5, 2, 1. Poteſt vero alligatio 11 ad extremum tantum ter fieri, & ſic fient differentiæ tantum tres, 7, 5, 2. Rurſus 11 ad 12, & 10 tantum ſemel, unde fient differentiæ 1, & 1.

In exemplo tertij caſus primus cum quarto: & ſecundus cum tertio alligatus fuit: & ſumma differentiarum fuit 9. Poteſt vero & alligari primus cum tertio: ſecundus cum quarto: tertius cum ſecundo. Rurſus quilibet duorum priorum cũ duobus poſterioribus, ut apparet in ſubiectis ſchematis.

	25.	1
	24	5. 1.
23.		
	22	2. 1.
	18	1.

Summa diff. 11.

	25	2. 1
	24	2. 1
23.		
	22	2. 1
	18	2. 1.

Summa diff. 12.

Quot igitur combinationes maiorum & minorum, tot alligationes.

8. Quamuis variæ alligationes ſemper producant pondus vel menſuram rerum miſcendarum congruens precio medio: non tamen eadem ſemper pondera & menſuras res miſcendæ continent. Sumã enim differentiarũ inæqualis euadit: aliàs maior, aliàs minor.

9. Quod ſi precium maius eſt unum: ad illud omnes differentias minorum preciorum adſcribere oportet: quæ, ut in alijs caſibus, in unam ſummam colligendæ ſunt, pro una differentia.

10. Productum è differentijs in medium æquatur producto ex ijſdem

ijsdem differentijs in precia simplicium mensuratum: v. g. in exemplo primi casus differentiæ sunt 4 & 2, quarum summa est 6. Iam vero precium medium est 10: extrema vero seu precia sunt 6 & 12. Summa differentiarum ducta in medium facit 60: idem est productum ex differentijs in precia, hoc modo.

10 < 6	2	6	2	12
12	4	12 ...	4	48.
	6.			60.
	10			
	60.			

Sunt igitur ista inter se æqualia: sex mensuræ precij 10 cr. valent 60 cr. Et 2 mensuræ precij 6 cum 4 mensuris precij 12, valent etiam 60 cr. Hinc & alternatio differentiarum probari potest. Nam si excessum maioris non adscriberes minori, & contrà: tum producta non fierent æqualia.

11. Cum dantur extrema, & medium quæritur, totæ res cum totis miscentur, hoc est, æquabiliter miscentur: ut tantum sumatur unius generis, quantum alterius. Cum datur medium, & extrema quæruntur, non miscetur totum cum toto, sed tantum cuiusque generis partes.

12. Regula alligationis magnam habet cognationem cum regula societatis. Summa enim differentiarum est instar summæ sortium singulorum, quæ collocatur primo loco. Ipsæ differentiæ sunt quasi sortes singulorum, quæ ponuntur tertio loco: medium est commune lucrum: vel maximus numerus, cum quo quartus congruit, per regulam trium inueniendus. Rectè igitur Frisius ait exempla regulæ alligationis per regulam societatis solui posse: unde & eadem vicina regulæ virginum habenda sunt.

13. Regula societatis in politicis: regula alligationis in physicis principatum obtinet.

REGVLA FALSI.

Πρόβλημα. Dato quocunque scopo, qui ex numero quocunque proueniat, numerum ignotum, ex quo scopus ortus est, per regulam falsi inuenire.

Duo sunt præcipui casus. Numerus enim quæsitus inuenitur aut ex posito uno numero falso, aut ex duobus. Et rursus numerus aut est absolutus, aut contractus. ind.

ἐκθ. primi casus. *Sit summa 65.*

Δ. Oportet *numerum inuenire, cuius dimidium, triens & quadrans eam summam constituat, idq́, mediante regula Falsi simplici. Hic 65 est numerus absolutus, idemq́, scopus. Numerus ignotus est is, ex quo scopus ille ortus est.*

Κατ. *1. Pone numerum quemlibet eum esse, qui quaritur. Sed quo facilius fiat experimentum, talis poni debet, qui datas habeat partes, expertes fractionum. Positus appellatur hypothesis. 2. Ex hypothesi secundum ductum quaestionis fiat progressus, donec perueniatur ad opus ipsum seu effectum operationis: quod si idem sit cum dato scopo, tunc hypothesis quoq́, est verus numerus quaesitus. Si vero à scopo differat, utere regula trium, qua ex falso verum elicit. Nam ut se habet opus hypotheseos ad hypothesin: ita se habet scopus ad verum numerum quaesitum, hoc modo.*

1. Loco veri numeri accipio 60. Nam huius numeri partes $\frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}.$ sunt 30, 15, 20.

2. Addo datas partes, & fit summa 65. quae cum sit eadem cum dato scopo, hypothesis, qua antea fingebatur, nunc verus esse numerus probatur.

Quod si accepissem pro vero numero 12, eum esse falsum, sic cognoscerem. Nam huius numeri una secunda, una tertia, una quarta, sunt 6, 4, 3. Hae partes additae faciunt 13. Atqui hoc opus dissentit à scopo (cuius numerus est 65.) Super inuento igitur falso ratiocinor per regulam trium, hoc modo.

Opus.	*hypothes.*	*Scopus.*	*Verus numerus.*
13. d.	*12. q.*	*65. d.*	*60.*

Opus est summa, quae venit ex hypothesi, quam finximus satis facturam quaestioni. Est autem hypothesis 12. Numeri homonymi sunt primus & tertius. Sic enim procedimus, si summa 13 venit ex 12: unde veniet summa 65? D. 60.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico numerum quaesitum esse 60.*

Ἀπόδειξις.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. 41. lib. 7. Numerum reperire, qui minimus cum sit, datas partes habeat. Inuenitur autem multiplicatione, ut & scholio 11 de diuisione docetur.

Datæ partes sunt $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Ergo minimus, qui datas partes habeat, est 12. Nam ter 4 sunt 12, quæ non tantum 3 & 4, sed & 2 metitur.

2. Syll. sententia. Datis partibus in numeris fractis, dabuntur partes numeri diuidui in numeris integris per diuisionem. Datæ partes in numeris fractis sunt $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$: minimus diuiduus est 12. Ergo numeri eiusdem in numeris integris per diuisionem sunt 6, 4, 3.

3 Syll. sententia additionis. Datis partibus dabitur totum earum per additionem. Datæ partes ficti numeri sunt 6. 4, 3. Ergo summa partium ficti numeri per additionem est 13.

4 Syll. 6. definitio lib. 5. Similia sunt, quæ habent partes æquè multiplices. 13, opus, id est, summa partium numeri ficti, & 65, scopus, id est, summa partium numeri veri, habent partes æquè multiplices. Ergo 13 & 65, id est, opus & scopus sunt inter se similia. Per eandem probatur numerum fictum & verum esse inter se similia, siue proportionalia.

5 Syll. sententia. Partes æquè multiplices sunt proportionales. Partes numeri ficti 6. 4. 3. sunt æquè multiplices partibus numeri veri. Ergo partes ficti & veri numeri sunt proportionales.

6 Syll. sét. Datis tribus, dabitur quæsitus proportionalis, per regulã trium. Hic dantur tria, summa partium numeri ficti, numerus fictus, & summa partium numeri veri. Ergo per regulam trium dabitur & numerus verus, hoc modo.

13. d. 12. q. 65? d. 60.

```
  12
 ----
 130 | 780
  65 | 13 (60.
 ----|
 780 | 28
       1
```

Συμπέρασμα. Dato igitur scopo, numerus, ex quo scopus ortus est, inuentus est, *quod fecisse oportuit*.

Δοκιμασία nulla certior, quàm inuentio partium, quas in unam summam colligere oportet. Nam si summa congruat cum scopo, nullum errorem admissum esse ostendet. Iam vero $\frac{1}{2}$ de 60, sunt 30:

Y y $\frac{1}{3}$ sunt

$\frac{1}{3}$ sunt 20: $\frac{1}{4}$ sunt 15, quæ addita procreant 65, scopum siue summam partium numeri veri.

Ἔκθ. secundi casus. *Tres negociatores diuidunt 200 fl. ea lege, ut secundus duplum primi accipiat, & tertius duplum secundi.*

Διορ. *Quæritur, quot fl. primus acceperit? Hic 200 fl. est numerus contractus.*

Κατ. *eadem est, quæ primi casus, hoc modo.*

1. Fingo primum accepisse fl. 80. Iam ex præscripto quæstionis secundus accepit 160: tertius autem 320. Nam 160 est duplum 80: & 320 duplum 160. Hic summa partium à scopo discrepat: ex quo apparet numerum fictum non fuisse verum. Ex eo igitur verum per sequentia præcepta inueniendus est.

2. 320 numerus tertij est summa partium. Alia igitur additione partium hîc opus non est.

3. Iam secundum regulam trium sic procedo.

320. d. 80. q. 200. d. 50.

Repetitio τῦ διορ. *Dico primum accepisse 50 fl.*

Ἀπόδειξις est eadem quæ præcedentis casus.

Δοκιμασία est hæc. Si primus accepit 50, ergo secundus 100, & tertius 200, qui numerus fuit summa proposita.

Ἔκθ. *Sit eadem summa 65, ut in primo casu.*

Διορ. Oportet *numerum inuenire, cuius dimidium, triens & quadrans eam summam constituat: idq́ mediante regula falsi duplici.*

Κατ. *1. Assume duos quoslibet numeros, qui vocantur hypotheses.*

2. Ex utroq́ numero sigillatim secundum quæstionis formulam, inquire opus, id est, summam, quæ venit ex hypothesi. Quod si alterutrum idem sit cum scopo proposito, tunc ea hypothesis, ex qua ortū est opus id, erit verus numerus: sin minus, ex falso verus inuenietur duplici methodo. Prior est, ut ducas priorem hypothesin in errorem posterioris operis: alterum verò, nempe posteriorem hypothesin ducas in errorem prioris operis: unde duo producta emergent.

Iam

Iam si errores prædicti similibus signis prosthaphæreticis sunt affecti, tunc unitas ad numerum verum se habet, ut differentia dictorum errorum ad differentiam productorum. Si vero diuersis afficiantur signis prosthaphæreticis: tunc unitas ad numerum verum se habet, ut aggregatum dictorum errorum ad aggregatum productorum. Secunda methodus est, ut acceptis duabus hypothesibus cum erroribus operum signo prosthaphæretico affectis, numeri sic disponantur. Vt differentia errorum operis ad differentiam hypotheseon: sic error prioris operis ad errorem prioris hypotheseos: & ita quoq; error secundi operis ad errorem secundæ hypotheseos. Tandem errori hypotheseos additur vel subtrahitur differentia hypotheseon pro ratione signorum additorum. Additur si hypothesis sit minor: subtrahitur, si hypothesis sit maior. Si igitur hypothesis fuerit maior vero numero, notari debet erratum operis cum signo −: si maior cũ signo ✠. Per priorem igitur methodum numerus ignotus inuenitur absolutè: per alteram verò non ipse numerus quæsitus: sed error tantum hypotheseos, qui additus vel ab eadem sublatus, prout hypothesis fuerit vero numero minor aut maior, dat verũ numerũ, ut in dato exemplo.

PRIOR METHODVS.

1. Loco veri numeri accipio priorem hypothesin 12, ex qua secundum quæstionis ductum inuenio opus, id est, summam partium additarum 13, ut supra. Partes enim sunt 6, 4 3. Debebant autem esse 65. Operis igitur error est ✠ 52.

2. Loco veri numeri accipio aliam, eamq; secundam hypothesin 24: ex qua secundum quæstionis ductum inuenio opus, id est, summam partium additarum 26. Partes enim sunt 12, 8, 6. Debebant autem esse 65. Operis igitur error est ✠ 39. Hic signa sunt inter se similia.

3. Hypothesin priorem duco in errorem secundæ: & contra hypothesin alteram in errorem prioris decussatim & fiunt duo produ-

cta: unum 468: alterum 1248, differentia verò duorum errorum per subtractionem est 13: differentia duorum productorum est 780, hoc modo.

12 ✕ 52
24 — 39

1248. 468. *Producta.*
468

780. *Differentia productorum.*

4. Iam sic dico.

Differentia errorum.		Differentia productorum.		Vnitas.		Verus numerus.
13.	D.	780.	q.	1.	d.	60.

Quod si prior hypothesis sit 12: posterior 72: hic fient diuersa signa, in quo casu alia erit operatio, nempe sic.

1. Sumto 12 pro hypothesi priore erunt partes ut antea, 6, 4, 3, quarum summa est 13. Operis igitur prioris error est ✠ 52.

2. Sumto 72 pro hypothesi posteriore, erunt partes 36, 24, 18. Summa partium est 78. Operis igitur error est — 13. Differentia errorum est 39. Aggregatum errorum est 65.

3. Duco hypothesin unam in errorem alterius decussatim, & fiunt duo producta: unum 156: alterum 3744. Aggregatum productorum est 3900, hoc modo.

12 ✕ 52
72 ✠ 13

3744. 156. *Producta.*
156

3900. *Summa productorum.*

4. Iam cum signa sint similia sic dico.

Agg. errorum.		*agg. productorum.*		*Vnitas.*		*Verus N.*
65.	d.	3900.	q.	1.	d.	60.

ALTE-

ALTERA METHODVS.

Retentis ijsdem hypothesibus, operibus, operumq; erroribus, errorumq; differentia, ut fuerunt in præcedenti methodo (omissis productis) capiatur differentia hypotheseon, quæ reperitur 12. Deinde ex methodo, ubi signa sunt similia, sic dico.

Differ. err.		diff. hypoth.		Error prioris operis.		Error prioris hypoth.
13.	D.	12.	q.	✠ 52.	D.	48.

Iam cum prior hypothesis minor fuerit, additur 48 ad 12, primã hypothesin, & fiunt 60.

Vel sic.

Differ. err.		Error post. operis		Differ. hypoth.		Error secundæ hypothes.
13.	D.	39.	q.	12.	D.	36.

Hic quoq; cum posterior hypothesis minor fuerit, additur 36 ad 24, alteram hypothesin, & fiunt, ut antea 60. Potest autem differentia hypotheseon poni vel secundo vel tertio loco.

Ex methodo autem, ubi signa sunt dissimilia sic dico.

Prima operatio.

Aggreg. err.		diff. hypoth.		Error primi operis.	Error primæ hypoth.
65	d.	60.	q.	52.	48.

60
———
3120 (48.
65

Secunda operatio.

Aggreg. err.		diff. hyp.		Error sec.		Error secundæ hypoth.
65.	d.	60.	q.	13.	d.	12.

60
———
780 (12.
65

Tandem 48. error primæ hypotheseos additur 12 primæ thesi, quæ fuit verâ minor, & fiunt 60. Rursus 12 error secundæ hypothe-

seos subtrahitur à 72, secunda hypothesi, quæ fuit verâ maior, & remanent 60. Numeri igitur utrobiq; congruunt.

Repetitio τῦ διορ. *Dico numerum ignotum, ex quo scopus natus est inuentum duplici positione per sex modos, esse 60.*

Δοκιμασία est eadem, quæ exempli primi casus. Nam eadem quæstio regula falsi simplici & duplici soluitur.

Ἀπόδειξις est eadem quæ sequentis casus.

ἔκθ. quarti casus. *Tres mercatores florenos centum lucri factos sic diuiserunt: ut secundus tres fl. plures quàm primus caperet: tertius quatuor plures quàm secundus.*

Δ. *Quæritur quot florenos primus habuit?*

Κατ. *eadem est, quæ tertij casus, hoc modo.*

1. Fingo primum accepisse fl. 33. Iam ex præscripto quæstionis secundus accepit 36: tertius 40. quæ summa collectæ faciunt 109. Debebant autem esse 100. Operis igitur prior error est ✠ *9.*

2. Loco veri numeri accipio aliam, eamq; secundam hypothesin 31. Ea ratione secundus 34, tertius 38 accepit, quorum summa collecta profert 103. Debebant autem esse 100. Operis igitur posterior error est ✠ *3. Differentia errorum est 6. Hic signa sunt similia.*

3. Hypothesin priorem duco in errorem secunda: & contra hypothesin alteram in errorem prioris decussatim, & fiunt duo producta: unum 99: alterũ 279, differentia duorum productorũ est 180.

33. 2. 31. Hypoth.

30 ✕

9. 6. 3. Errores.

279. 180. 99. Producta.

99

180. — differ. productorum.

4. Iam sic dico.

Differ. err.	*differ. product.*	*Vnitas.*	*Verus numerus.*
6. D.	*180.*	*q. 1.*	*d. 30.*

Repeti-

Repetitio τῦ διορ. Dico primum accepisse fl. 30.

Ἀπόδειξις.

1 Syll. sententia. Differentiæ hypotheseon à vero numero ad suos errores sunt æque multiplices. Differentiæ hypotheseon à vero numero in nostro exemplo sunt 3 & 1: errores sunt 9 & 3. Ergo ut se habet 3 ad 9: ita 1 ad 3.

Diff.		Er.
3	⨯	9
1		3
9		9

2 Syll. sententia. Quorum eadem est ratio, eorum producta alterna sunt inter se æqualia. Duorum numerorum 3 & 9 est eadem ratio, quæ 1 & 3. Ergo producta alterna ex multiplicatione errorum in differentias hypotheseon sunt inter se æqualia. Vtrobique enim est 9.

Hypoth.		Er.
33	⨯	9
31		3
279.		99.

3 Syll axioma 11. lib. 1. Totum ductum in alterum totum tantum producit quantum idem totum ductum in omnes partes alterius totius. Duo tota sunt 3. & 33. Partes unius totius 33 sunt 30 & 3: 30 verus numerus: 3 differentia prioris hypothesis à vero numero Ergo productum ex multiplicatione 3 in 33 (unde fit 99) est æquale producto ex multiplicatione 3 in partes 30 & 3: id est, productum ex multiplicatione posterioris erroris in priorem hypothesin est æquale producto ex multiplicatione posterioris erroris in verum numerum & differentiam prioris hypotheseos à vero numero Vtrobique enim productum est 99. Nam & 3 ducta in 3 & 30 procreant 99, hoc modo.

Error 3 < 30. Verus N. .... 90.
3. Differ. primæ hyp. 9.

99.

4 Syll per eandem productum ex multiplicatione 9 in 31, id est, prioris erroris in posteriorem hypothesin (unde fiunt 279) est æquale producto ex multiplicatione prioris erroris in verum numerum & differentiam posterioris hypotheseos à vero numero. Vtrobique enim productum est 279. Nam & 9 ducta in 30 & 1 procreant 279, hoc modo.

Error

Error 9 < 30. Verus N. ——————————— 270.
1. Differentia posterioris hypothesis à vero N. 9
Summa 279.

Hinc apparet, cur fiat alterna multiplicatio.

5 Sentent. Quæ uni sunt æqualia inter se sunt æqualia. 99 & 279 sunt producta ex multiplicatione errorum in verum numerum & differentias hypotheson à vero numero.

Eadem 99 & 279 sunt producta ex multiplicatione errorum in hypotheses. Ergo producta ex alterna multiplicatione errorum in verum numerum & differentias hypotheseon à vero numero sunt æqualia.

6. Sententia. Si ab inæqualibus quantitatibus æqualia auferas, residua eandem seruant differentiam. Hic sunt inæqualia producta 279. & 99, à quibus auferuntur æqualia 9 & 9, per secundum syllogismum. Ergo residua 270, & 90 eandem habent differentiam, quam inæqualia 279 & 99, à quibus facta est subtractio. Vtrobique enim differentia est 9.

7. Sententia. Quæ eandem habent differentiam, ea à se inuicem subtracta idem residuum relinquunt. 279, & 99: item 270 & 90 habent eandem differentiam. Ergo à se inuicem subtracta relinquunt idem residuum, nempe 180: quæ differentia productorum appellatur.

8 Syll. sententia. Differentia productorum est æqualis producto ex multiplicatione differentiæ errorum in verum numerum. Differentia productorum est 180. Ergo eadem est & productum ex multiplicatione differentiæ errorum in verum numerum.

9 Syll. sententia diuisionis. Dato producto duorum numerorum & uno numero: dabitur alter per diuisionem. Productum duorum numerorum est 180, & unus numerus, id est, differentia errorum, nempe 6, datur. Ergo numerus alter, isque quæsitus, per diuisionem est 30.

10 Syll. sententia diuisionis. Vt diuidendus ad diuisorem: sic quotus numerus ad unitatem se habet: directè & ἀνάπαλιν. Diuisor est 6, differentia errorum: diuidendus est 180, differentia productorum, siue productum ex ductu differentiæ errorum in verum numerum: quotus est 30. Ergo ut se habet differentia errorum ad differentiam productorum: ita unitas ad verum numerum: *quod demonstrasse oportuit.*

συμπέρ. Dato igitur scopo inuentus est numerus tertius, ex quo scopus ortus est per regulam falsi duplicem, in casu tali in quo signa fuerunt similia. Quod

Quod si signa sunt dissimilia, paulo aliter ratiocinatio instituenda est, nempe hoc modo.

1. Fingo primum accepisse fl. 33. Iam ex præscripto quæstionis secundus accepit 36: tertius 40, quæ summa collecta faciunt 109. Debebant autem esse 100. Operis igitur prior error est + 9.

2. Fingo deinde primum accepisse fl. 20. Ea ratione secundus 23: tertius 27 accepit, quorum summa collecta profert 70. Debebant autem esse 100. Operis igitur error posterior est – 30 differentia errorum 21. Aggregatum errorum est 39. Hic enim signa dissimilia, additionem requirunt.

3. Duco hypothesin unam in errorem alterius decussatim, & fiunt duo producta, unum 990: alterum 180. Aggregatum productorum est 1170: ut habetur in schemate.

33	9
20	30
180.	990.
	180
	1170.

4. *Iam sic dico.*

Agg. err. *aggreg. prod.*

39. d. 1170. q. r. d. 30.

Repetitio τῆς δοκ. *Dico positis diversis thesibus quarum una maior, altera minor verâ fuit, prodijsse eundem numerum, qui antea, & primum accepisse fl. 30.*

Ἀπόδειξις in numeris ubi signa sunt dissimilia eadem est, quæ præcedentis casus. Hic vero pro differentijs sumuntur aggregata propter diversitatem signorum & hactenus prior methodus. Sic enim fit exæquatio excessuum & defectuum.

POSTERIOR METHODVS.

Posterior methodus, in qua sumuntur errores operum, & differentia tum hypotheseon, tum errorum, & signa sunt similia, est hæc.

Zz *Differ.*

Differ. err. differ. hypoth. Error prioris operis. Error prioris hyp

6. D. 2. ✠ 9. 3.

9

18 (

6 (3.

Iam cum prior hypothesis maior fuerit, subtrahitur 3 à 33, & remanent 30, quæsitus numerus: vel sic.

Error secundi operis. Error secunda hyp.

6. D. 2. 9. ✠ 3. D. 1.

3

6 (1.

6

Hic quoq; cùm posterior hypothesis maior fuerit, subtrahitur 1 à 31, & remanent 30, quæsitus numerus, ut antea.

Quod si signa sint dissimilia, sumitur pro differentijs aggregatũ errorum, & fit duplex operatio, hoc modo.

PRIMA. Aggregat. err.	*diff. hypoth.*		*Error prioris operis.*	*Error prioris hypotheseos.*
39.	13.	✠	9.	--- 3.

SECVN. agg. err.	*diff. hyp.*	*error post. operis.*	*Error poster. hypoth.*
39.	13.	--- 30.	10.

Hic primum, quia hypothesis fuit 33, verâ maior: & error illius 3: subtrahitur 3 à 33, & remanent 30. Deinde quia hypothesis 20 fuit verâ minor, & error illius 10, additur is ad 20, & fiunt 30, proditq; utrobiq; idem numerus.

Ἀπόδειξις posteriorũ methodi: ubi signa sunt similia.

1 Syll. 12. septimi. *Si fuerit ut totus numerus ad totum: sic ablatus ad ablatum: tum reliquus ad reliquum etiam sic se habebit, ut totus ad totum.*

Totus 9 ad totum 3 sic se habet: ut ablatus 6 ad ablatum 2.

Ergo

Ergo residuum 3 ad residuum 1, sic se habet ut 9 ad 3. Est autem ubiq; ratio tripla.

2 Syll. 1. axioma, *Quæ uni conueniunt, inter se conueniunt.* *Totus 9 est error prioris operis: 3 alter totus est error prioris hypothesis: 6 ablatus est differentia errorum: 2 alter ablatus est differentia hypotheseon: & 3 residuum, error secundi operis: 1 residuũ secundæ hypothesis: rursus 9 totus: 3 alterum totum. Ergo ut se habet differentia errorum ad differentiam hypotheseos: ita error prioris operis, ad errorem prioris hypothesis: & similiter error secundi operis ad errorem secundæ hypotheseos.*

3 Syll. sententia *Excessus subtractus à falso relinquit, contra deficientia addita falso procreat veram hypothesin. 3 est excessus, quo 33, unum falsum, superat veram hypothesin: 1 est excessus quo 31 alterum falsum superat veram hypothesin. Ergo 3 subtracta à 33, & 1 subtractum à 31, relinquit 30, veram hypothesin.*

Eadem est ἀπόδειξις, *ubi signa sunt dissimilia. Contrariorum autem contraria sunt consequentia. Vt igitur similia differentiam errorum: sic dissimilia aggregatum eorundem requirunt. Et rursus excessus subtractionem: deficientia additionem postulat. In hoc igitur casu operatio tum additione, tum subtractione perficitur.*

συμπέρ. *Dato igitur scopo, inuentus est numerus tertius, ex quo scopus ortus est, per posteriorem methodum regulæ falsi duplicis, in casu utroq; signorum prosthaphæreticorum.*

Δοκιμασία *est collatio scopi cum inuento numero, qui congruere debent. V. G. in ultimo exemplo scopus 100 congruit cum 30, inuento numero. Nam si primus accepit 30, secundo cesserunt 33, tertio 37, quæ collecta faciunt 100, sicut quæstio proposuit.*

σχόλιον.

1. Regulam Falsi Arabes suo nomine Cathaim vocant: nos etiam regulam hypotheseos, siue positionis. Potest vero appellari & regula duorum. Quidam vocant regulam veri. Cathaim dicitur, quasi aurea, ab Hebraita voce Kethem, quæ massam auri fulgentem, & clinodium significat. Reuera enim aurea est, & digna admiratione: &

inter eas; quæ regulam trium ad usum transferunt, ut aurum præclarum latè fulget. Cæteræ enim, quæ præcesserunt, modum ostendunt, quo difficiliores quæstiones ex datis ueris ad regulam trium reuocari possint: hæc docet ex fortuitis coniecturis, ijsque falsis, & ad quas errores sequuntur, oblatæ quæstionis veritatem, tanquã lucem ex tenebris elicere. Celebratur à Virgilio, qui primum silicis scintillam excudit Achates: longè illustriorem verò ingenij laudem meretur, primus regulæ Falsi inuentor, cuius solertia factum est, ut quæ plerisque imperscrutabilia videntur: nullo negocio in lucem veniant. Falsi igitur & hypotheseos, latinè positionis regula dicitur, quòd ex posito & per hypothesin assumto falso vel putato vero numero, verum verè inuestigare docet. Vt autem regula proportionũ, regula triũ à tribus numeris appellatur: sic ista, regula duorum vel binorum dici potest: eò quod quæsitum interdum per unum, sæpius per duos numeros inuenire præcepta tradit. Nomen inusitatius veri, ab effectu: nomen usitatum falsi à causa accepit. Nec tamen illud valde congruit, cum sit latius definito. Pari enim iure & cæteræ omnes, quæ præcesserunt, & ipsa adeo regula trium, regulæ veri verè dici meretur.

2. Regula falsi est, quæ hypothesin simplicem vel duplicem assumit, eamque secundum quæstionis ductum examinat, opus inuenit, errorem cum errore: hypothesin cum hypothesi confert, & hinc ope regulæ trium quæsitum numerum inuenit.

3. Numeri huius regulæ sunt duplices: dati & quæsiti. Dati sunt, qui præcedunt inuentionẽ numeri quæsiti: ut sunt numeri quæstionis; scopus; hypothesis una, vel duæ: opus, error duplex, operis & hypotheseos: differentia quadruplex, hypotheseos, operum, errorũ hypotheseon, operum, errorum operum. Quæsitus est, qui sequitur regulam trium, isq; est verus numerus, ex quo scopus verè natus est.

4. Scopus est numerus expresse vel proportionaliter propositus, qui à vero numero, secundum quæstionis ductum prouenit.

5. Hypothesis est numerus quicunque assumtus, quem loco veri numeri, secundum quæstionis ductum regula examinat: estque vel unica, vel duplex.

6. Opus est numerus, qui ex hypothesi secundum quæstionis ductum examinata nascitur: estque vel + vel −.

7. Error hypotheseos est numerus, quo hypothesis à vero numero distat. Error operis est numerus, quo opus à scopo differt. Inuenitur igitur subtrahendo residuum + vel − à scopo.

8. Differentia hypotheseon est, numerus, quo minor hypothesis à maiore

à maiore distat. Differentia operum est numerus, quo opus unum ab alio differt. Differentia errorum hypotheseon est numerus, quo unus hypotheseos error ab alterius hypotheseos errore distat. Differentia hypotheseon à vero numero sunt numeri, quibus una hypothesis differt à vera hypothesi.

9. Verus numerus est, qui quæritur. V. G. in exemplo ultimo, quæstio est. Inuestigetur trium mercatorum, qui 100 fl. diuiserunt certa lege, (quæ in quæstione exprimitur,) primus quot acceperit? solutio. Accepit 30.

Verus numerus, qui quæritur est 6.

Hypothesis prior ad libitum fuit 33.

Opus maius eiusdem hypotheseos est 109. Nam si primus accepit 33, secundo cesserunt 36: tertio 40, quæ collecta faciunt 109.

Hypothesis altera ad libitum fuit 31: opus minus eiusdem hypotheseos est 103. Nam si primus accepit 31, secundo cesserunt 34: tertio 38: quæ collecta faciunt 103.

Error hypotheseos prioris (videlicet 33,) est 3. Nam eo numero distat prior hypothesis à vero numero 30.

Error hypotheseos alterius (videlicet 31) est 1. Nam eo numero distat altera hypothesis à vero numero 30.

Error operis prioris (videlicet 109) est 9. Nam eo numero distat prius opus à scopo 100.

Error operis posterioris (videlicet 103) est 3. Nam eo numero distat alterum opus à scopo 100.

Differentia hypotheseon falsarum est 2. Nam eo numero distat minor hypothesis 31 à maiore 33.

Differentia errorum operum est 6. Nam eo numero differt minus opus 103 à maiore 109.

Differentia errorum hypotheseon est 2. Nam eo numero differt prioris hypotheseos error 3 à posterioris hypotheseos errore 1.

Differentia hypothesium à vero numero est 3 & 1. Nam 3 differt prior hypothesis à 30 vero numero & 1. Posterior ab eodem numero.

10. Errores hypothesium aut sunt similes, aut dissimiles. Similes rursus vel in excessu, vel in defectu. Dissimiles sunt, unus in excessu, alter in defectu. Quibuscunque autem hypothesibus utaris eundem semper numerum quæsitum inuenies.

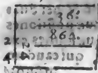
11. Quicquid per unicam positionem inuenitur: id & per duas expediri potest, non contrà. Neque enim quicquid duæ positiones explicant, id unica præstabit. Hæc enim illas tantum quæstiones expedit, in quibus tales partes aut numeri exprimuntur, qui eandem

proportionem habent in paruis numeris, quam in magnis, quales sunt $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ & similes, item numeri dupli, tripli, quadrupli, &c. Hinc quidam ex Arithmeticis præcepta duplicis tantum hypothesis tradunt: simplicis negligunt. Alij priorem etiam explicant, per quam plurimæ quæstiones multò breuius quàm posteriorem solui possunt.

12. Regulam Falsi Stifelius fortuitò inuentam fuisse putat. P. Ramus ab Arithmeticis planè exclusit, quod sine demonstrationis luce tractaretur. Nostro autem tempore Franciscus Vieta eam primus in lineis explicauit: Bruceus in numeris demonstrauit: uterque obscurus pro tyronibus. Nos igitur adhibitis syllogismis, qui præcipua perspicuitatis instrumenta sunt, nunc illustriorem, & intellectu faciliorem in lucem edimus.

13. In quæstione, ubi fracti numeri occurrunt, labor operosus & molestus est. Illius igitur vitandi causa, numeris integris pro fractis uti satius est. Sumitur autem semper numerus, qui fractiones in quæstione expressas contineat, & diuiditur per denominatores fractorum, unde quoti exeunt, qui partes indicant: ut in primo casu numerus 60 in fractis continet $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, in integris 30, 20, 15. Nam pars $\frac{1}{2}$ est 30: pars $\frac{1}{3}$ est 20: pars $\frac{1}{4}$ est 15. Laborem non fugiens eadem exempla per retentos numeros fractos æquè bene supputare potest. Quomodo autem is numeris, isque minimus, qui datas partes habeat, inueniri possit, id supra in eodem primo casu monstrauimus.

14. Quæstiones, in quibus bini vel terni, vel plures etiam termini inter se multiplicandi dantur, per regulam falsi dissolui non possunt, nisi vel quadrata radix, vel cubica, vel quadratiquadrata, & sic deinceps, extrahatur. Extrahitur autem radix primum peractis omnibus, de quibus supra dictum, eo usque dum ad multiplicationem differentiarum in hypotheses perueneris. Postea enim pro primis hypothesibus, quadrata earundem, si bini inter se multiplicati fuerint; aut cubica, si terni, atque ita deinceps, reponuntur: ac reliqua deinceps, ut supra, absoluuntur. Hanc regulam quidam à primo illius autore regulam Gemmæ appellant. Ea vero tantas varietates habet, easque difficiles distinctu, ut regulæ Algebræ ope, ad quam pertinent, facilius & dilucidius solui possint. Vnicum igitur tantum exemplum afferemus. Est area quatuor angulorum, cuius superficies continet passus 864. habet autem se latitudo ad longitudinem ratione sesquialtera. Quæritur igitur, quot passuum longitudo sit, & quot item latitudo? Solutio fit hoc modo.



1. Fingo

1. *Fingo latitudinem esse 2 pass. Iam ex praescripto quaestionis longitudo erit 3 pass. Nam 2 & 3 sunt numeri secundum rationem propositam: quae in se ducti faciunt 6. Debebant autem esse 864. Operis igitur error prior est .. 858.*

2. *Altera uice latitudinem pono esse 4 pass. Erit igitur longitudo 6. Nam 4 ad 6 habent rationem sesquialteram, ut 2 ad 3. Ductis 4 in 6, exeunt 24. Debebant autem esse 864. Operis igitur error posterior est 840. Differentia errorum est 18.*

3. *Hypothesin utramq. in se multiplica, 2 in 2, & 4 in 4. & exeunt noui termini 4 & 16: tractandi, ut datae hypotheses, hoc modo.*

4	858	
16	840	
14728	3360.	*Producta.*
3360		
10368	*differentia productorum.*	

4. *Iam sic dico.*

Diff. err. *diff. prod.*

18. d. 10368. q. 1. d. 576.

5. *Radix quadrata de 576 est 24, prior terminus quaesitus: cui si partem sui alteram adieceris, habebis & terminum posteriorem 36. Inuenitur autem sic: 2 d 3. q. 24. d 36. Dico igitur latitudinem dati quadranguli esse 24 pass. longitudinem 36 pass.* Δοκιμασία. *Nam 24 ducta in 36 procreant 864: numerum ab initio propositum.*

15. *Quaestiones, quae per regulam trium soluuntur: eaedem etiam per regulam Falsi solui possunt: licet non contra.*

16. *Cum numeri accommodantur ad materiam physicam, quae requirit dimensiones magnitudinum, ut triangulorum, quadrangulorum, circulorum: Geometriae cognitionem praecedere oportet: unde quidam ex Arithmeticis Geometriae praecepta suis Arithmeticis adijcere solent.*

REGVLA ALGEBRÆ.

Πρόβλημα. Dato quocunque scopo, qui ex numero quocunque proueniat, numerum ignotum, ex quo scopus ortus est, per regulam Algebrae inuenire.

Multi

Multi sunt casus huius regulæ. Numerus enim aut unus aut plures indagandi proponuntur: & rursus proponitur aut abstractus, aut contractus: aut integer, aut fractus: aut simplex, aut compositus: aut rationalis, aut irrationalis: deniq. æquantur aut numeri collaterales, aut non collaterales.

Ἐκθ. primi casus. *Sit scopus 30.*

Διορ. Oportet *numerum inuenire, cuius duplum & dimidium coniuncta eum scopum siue summam constituant: idq. per regulam Algebræ.*

Κατασκ. *communis omnium casuum.*

1. Pro numero incognito qui quæritur, pone radicem unam, hoc modo, 1 ℞.

2. 1. ℞. secundum tenorem quæstionis (quæ ænigmatis circumstantias enumerat) examina, donec æquationem inueneris: cuius duo sunt numeri: unus scopus in quæstione positus: alter numerus ex tractatione 1 ℞ ortus.

3. Si una pars per alteram diuidi potest, reductione tibi opus non est, sed mox diuisionem scopi per numerum extractione 1 ℞ ortum institue. Quod si non potest, fac reductionem, per doctrinam lib. 5. fol. 214.

4. Diuisor est numerus ex tractatione 1 ℞ ortus, siue numerus characteris cossici maioris. Maior est ℞ quàm 𝔑 *: ʓ maior quàm ℞ : ∁ maior quam ʓ & sic deinceps. Diuidendus est scopus, alter æquationis numerus, siue numerus characteris cossici minoris.*

5. Quod si æquatio sit inter numeros collaterales, quotus ex diuisione numerum ignotum immediatè mox patefacit. Sin minus, ex quoto extracta radix, quam character ostendit, numerum ignotum tandem patefacies, hoc modo.

1. Pono hunc numerum qui quæritur esse 1 ℞, ita ut 1 ℞ æqualis intelligatur numero abscondito, quem inquirimus.

2. Secundum quæstionis tenorem examino 1 ℞, hoc est, sumo ipsius duplum

duplum & dimidium, siue 2 ℞. & ½ ℞, quæ partes simul constituunt 2½ ℞. Iam sic ratiocinor. Quoniam 1 ℞ posita est æqualis toti numero abscondito, qui quæritur, erit 2 ℞ æqualis duplo totius numeri, & ½ ℞ dimidiæ parti eiusdem. Et quoniam duplo ℞ ac dimidio ℞ additis summa est 2½ ℞, fit ut summa hæc æqualis sit summæ 30. Inuenta est igitur æquatio inter 2½ ℞ & 30. N.

3. Inuenta æquatio non indiget reductione, quod una pars æquationis per alteram diuidi potest.

4. Diuido 2½ ℞ numerum Cosʃici maioris per 30, reliquum æquationis numerum relicto charactere ℞: & prodeunt 12 numerus quæsitus.

Est autem 2½ ℞ numerus Cosʃici maioris: 30 N. numerus Cosʃici minoris. Nam ℞ est maior character quàm N. cùm huius exponens sit 0, illius vero 1. Nec radix extrahitur, sed ipse quotus offert numerũ quæsitũ: eò quod æquatio sit inter numeros collaterales ℞ & N.

Repetitio τοῦ διορ. *Dico 12 esse eum numerum, cuius duplum & dimidium coniuncta 30 efficiunt.*

Ἀπόδειξις, eaq́ communis omnium casuum.

1 Syll. ſententia. *Aequè multiplices partes habentia sunt proportionalia. 2½ ℞ & 30: sic 1 ℞ & ignotus numerus habent partes æquè multiplices. Ergo hæc 4 sunt proportionalia.*

2 Syll. ſententia regulæ trium. *Datis tribus, dabitur quartus proportionalis per regulam trium. Ex quatuor proportionalibus tres dati sunt: 2½ ℞. 1 ℞, 30 N. Ergo quartus ignotus dabitur per regulam trium, hoc modo.*

2½ ℞ d. 30. N. q. 1 ℞. d. 12.

5
30/1 ℞ × 5/2 ℞ | 60 (12.
55

συμπέρ. Dato igitur ſcopo &c. inuentus est numerus quæsitus, quod feciſſe oportuit.

σχόλιον.

1. In primo casu unus numerus indagandus proponitur: isque simplex & abstractus: & diuisor habet characterem radicis.

2. Reductione nulla opus est, quia maioris characteris Cossici reliquus æquationis numerus diuidi potest: cum & solus ponatur in altera parte æquationis, & diuersus in reliqua parte character reperitur.

3. Diuisis 30 ℞ per $2\frac{1}{2}$, siue $\frac{5}{2}$ ℞ characteres cossici abijciuntur, & absolutus 30 per absolutum $\frac{5}{2}$ diuiditur, secundum regulam supra positam fol. 252. Quando diuidendus & diuisor habuerint eandem denominationem, una alteram tollit.

4. In praxi regulæ solius diuisionis fit mentio, quia unitas non multiplicat. Cur autem fiat diuisio sola regula trium causam ostendit.

Δοκιμασία. Si 12 sumatur $\frac{1}{2}$, nimirum 6: & duplum, videlicet 24, atque hæ partes addantur, fit summa 30: id quod in quæstione proposita desiderabatur. Est igitur unius radicis valor 12: versaturque 12 in progressione Geometrica ab 1 incipiente, in qua numerus unitate proximus est 12, qualis est hæc. 1. 12. 144. 20736.

Ἐκθ. secundi casus. *Alexander Magnus de sua atq; amicorum Ephæstionis & Clyti ætate ænigma tale Arithmeticum dicitur proposuisse Callisthenì philosopho. Ego Ephæstionem antecedo biennio. At Clytus amborum annos sua ætate complexus adhuc quadriennio maior est. Cui Callisthenes, ut ænigma explicaret respondisse dicitur. Pater meus ubi compleuerat annum 96, tres vestrum dum vixit, ætates compleuit.*

Διορ. *Quæritur quotum ætatis suæ annum egerit Ephæstion?*

Κατ. *1. Pro annis Ephæstionis, qui minimus natu fuit pono 1 ℞.*

2. Secundum quæstionis tenorem, erunt anni Alexandri 1 ℞ ✠ 2: Clyti vero 2 ℞ ✠ 6. Hæc coniuncta faciunt 4 ℞ ✠ 8: quæ de responso Callisthenis æquantur annis 96.

3. Inuenta æquatione fit reductio Cossicorum compositorum ad simplices abiectis ab utraq; parte 8, & residua manebunt æqualia 4 ℞ & 88. Hic enim una denominatio (videlicet numeri) bis reperitur:

peritur: & fit subtractio propter signum +, ut habetur fol. 214.

4. Diuido 88 per 4, abiecto charactere ℞ (per doctrinam diuisionis, ut & in praecedenti casu) & prouenit valor 1 ℞, qui est 22. Nec radix extrahitur, sed ipse quotus offert numerum quaesitum.

Repetitio τῦ διορ. *Dico Ephaestionem egisse annum 22.*

χίλσον. In secundo casu unus numerus indagandus proponitur, isque contractus: & diuisor habet characterem ℞.

Poteſt vero & eadem quaeſtio ad numeros abſtractos reuocari in haec verba. Quaeruntur tres numeri, quorum primus ſecundum binario ſuperat: tertius vero ambos quaternario: atque ij tres ſimul poſiti efficiunt 96.

Δοκιμασία eſt haec. Ephaeſtionem, qui tum egit annum 22, Alexandro anteiuit biennio. Fuit ergo aetas Alexandri tunc 24 annorum.

Vtriusque vero aetatem cùm quadriennio ſuperarit Clytus, fuit annorum 50. Haec addita conſtituunt 96, numerum à Calliſthene definitum.

Poteſt & probari per aliam methodum ſic. Pro annis Alexandri pono 1 ℞. Et erunt Ephaeſtionis anni 1 ℞ --- 2. Clyti vero 1 ℞ + 2. Haec adde fiunt 4 ℞, aequales 96. (Nam + 2 & -- 2 ſe mutuo tollunt.) Iam diuiſis 96 per 4, prodit quotus 24, numerus annorum Alexandri, ut prius.

ἐκθ. tertij caſus. *Duo habent ſummas aureorum mihi ignotas. Inquit prior alteri, ſi unum aureum de tuis adieceris mea ſummae, habebimus paria. Reſpondet alter, Tu vero ſi unum aureum de tuis mihi praebueris, confecero tua ſumma duplum.*

Δ. *Quaeritur quot florenos primus, quot ſecundus habuerit?*

Κατ. *I. Tribuo priori 1 ℞ aureorum: alteri 1 A.*

II. Radix ſecunda 1 A reducatur ad 1 ℞ (per doctrinam ſec. rad. fol. 276) inquiſita aequatione, id eſt, differentia exquiratur inter 1 ℞, & 1 A. Elicietur ea ſubtracto 1 aureo de 1 A, eoq́; ad 1 ℞ accōmodato cum ſignis + & — de tenore quaeſtionis. Fiunt ergo aequalia 1 ℞ + 1 aureo, & 1 A --- 1 aureo. Nam prior adiecit ſua ſummae 1: alter 1 de ſua ſumma detraxit: & ſic habebunt paria.

III. Inuentam aequationem reduci oportet, cum in utraq; parte

Aaa 2 *aequa-*

æquationis reperiatur, & character hic ℞, & hic N. Fiat autem reductio primum subtrahendo 1 N, ex 1 A — 1 N, unde 1 A solus relinquitur: idem vero 1 N addendo 1 ℞ + 1 N, unde fit 1 A æqualis 1 ℞ + 2, ut docetur fol. 215. Signum enim — transpositum transit in +.

IIII. Absoluta reductione secundæ radicis ad primam inquiro valorem 1 ℞ de indicio quæstionis, quæ pronunciat 1 A + 1, duplum esse 1 ℞ — 1, scilicet 1 A assumat ab 1 ℞ unum aureum. Detracta ergo unitate de 1 ℞, & adiecta ad 1 ℞ + 2, qui valor est 1 A constituitur 1 ℞ + 3, duplum 1 ℞ — 1.

V. Fiat æquatio inter 1 ℞ — 1 & duplum 1 ℞ + 3 & æquabuntur 1 ℞ + 3, & 2 ℞ — 1.

VI. Aequata reducantur ad simplices numeros, ut sint æqualia rursus 2 ℞, & 1 ℞ + 5. Et iterum abiecta utrinque 1 ℞, æquantur 1 ℞ & 0 + 5: & facta transpositione æqualia sunt 5 & 1 ℞.

VII. Facta diuisione maioris per minorem prouenit 5 N. valor unius radicis.

Repetitio τῦ διορ. *Dico primum habuisse aureos quinque: alterum 7.*

σχόλιον.

In tertio casu duo numeri indagandi proponuntur: ijque contracti, & diuisorem habent characterem R: duas vero radices, primam & secundam.

Δοκιμασία est hæc. Primus aureos quinque habuit: alter septem. Nam 1 subtracto à 7 fit residuum 6: & 1 addito ad 5 fit totum 6, residuum & totum, numeri pares. Et rursus 1 subtracto à 5 fit residuum 4: & 1 addito ad 7, fiunt 8, duplum prioris residuum.

Quæstio sumta est ex Euclideo Epigrammate de mula & asino, cuius quæstionis numeros ad alias res alij accommodant.

Eadem quæstio potest solui etiam per unam radicem, quod ut explicemus, & varietate tædium depellamus, accipiemus mulum & asinam ex Epigrammate illius, quod sic se habet conuersum in carmen latinum.

Mulus portabat uinum comitatus asella:
[illegible] oneris queritur pondera uasta sui.

Ille

Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,
Cur adeo lachrymis lumina mæsta fluunt.
Mollities teneras, mater, decet illa puellas,
Quas premit insuetus, debilitatq; labor.
Vnam mensuram, si nostros fundis in utres:
Ipse tui uini pondera dupla feram.
Sin unam contra nostro de fasce leuabis
Partem, tunc æquum pondus uterq; feret.
Dic mihi mensuras, ô docte Geometer istas,
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

Methodus supputationis est hæc.

1. Pono 1 R pro mulo.

2. Secundum quæstionis tenorem examino 1 R. & sic ratiocinor. Ergo si addidero 1 de pondere asellæ, tunc pondus illius erit 1 R. + 1, duplum ponderis muli. Rursus si 1 R. + 1 est duplum ponderis, ergo pondus asellæ residuum erit $\frac{1}{2}$ R. + $\frac{1}{2}$ N. Subtraho iam à mulo 1 N. id est, unam mensuram, & remanebit ei 1 R. -- 1 N. Itaque asella habebit $\frac{1}{2}$ R. + $2\frac{1}{2}$. quæ est æqualis ponderi muli, quod fuit 1 R --- 1 N Hæc est æquatio.

3. Reductio, eaque duplex hic necessaria est, ut possit fieri diuisio. Primum igitur ex 1 R. --- 1 N æquata $\frac{1}{2}$ R. + $2\frac{1}{2}$. addendo 1 N ad $2\frac{1}{2}$ facit 1 R. æquatorem $\frac{1}{2}$ R. + $3\frac{1}{2}$. Rursus ex 1 R. æquata $\frac{1}{2}$ R. + R. $3\frac{1}{2}$. subtrahendo $\frac{1}{2}$ ab 1 R. & $\frac{1}{2}$ facit $\frac{1}{2}$ R. æquatam $3\frac{1}{2}$ N.

4 Diuisis $3\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{2}$ quotus est: 7, hoc modo. $\frac{7}{2} \times \frac{1}{2}$ | $\frac{14}{2}$ (7.

Repetitio τῆς διορ. *Dico mulum ab initio habuisse septem: asellam vero quinq;.*

Δοκιμασία per valorem numerorum Cossicorum est hæc.

Mulus	N. 7. / 1 R	Productum ex additione 1 de pondere asellæ	8 / 1 R. + 1 N duplum ponderis asellæ.	Residuum ex subtr. 1	6. / 1 R. – 1. N.
Asella	N. 5. / 1 R.	Residuũ ex subtr. 1. additi ad pondus muli	4. N. / $\frac{1}{2}$ R + $\frac{1}{2}$ N dimidiũ ponderis muli.	Productũ ex additione 1.	6. / $\frac{1}{2}$ R. + $2\frac{1}{2}$ N.

Ἐκθ. quarti caſus. *Sit ſcopus 8.*

Δ. Oportet *numerum inuenire, qui ductus in 8 + √20 : & producto diuiſo per 6 + √11¼ eum ſcopum conſtituat.*

Κατ. *Pono hunc numerum, qui quæritur eſſe 1 ℞. Secundum quæſtionis tenorem examino 1 ℞, & duco eam in 8 + √20 N. unde prodit 8 + √20 ℞. Rurſus productum diuido per 6 + √11¼. unde exit quotus.*

Aequalia igitur ſunt $\frac{8}{1} \times \frac{8}{6}\,\frac{+\ \sqrt{20}\ R.}{+\ \sqrt{11\frac{1}{4}}.}\quad \frac{8\ +\ \sqrt{20}\ R.}{6\ +\ \sqrt{11\frac{1}{4}}.}$ *æqualis 8 N.*

Reduco æquationem fractam ad integra ducendo 8. N. in 6 + √11¼, ut ſint æqualia rurſus 48 + √720 N. & 8 + √20 ℞. Tandem N per ℞ diuido, nimirum 48 + √720 per 8 + √20 ℞ & fit quotus 6.

Repetitio τῆ διορ. *Dico 6 eſſe eum numerum, qui quæritur.*

χόλιον. 1. In hoc caſu diuiſor habet binomiũ, numerũ irrationalẽ.

2. 8 + √20 R. diuidi non poſſunt per 6 + √11¼. quia diuidendus R. diuiſor N. characterem habet. Subſcripto igitur diuiſore ipſi diuidendo numero, interiectaque linea, fit fractio.

$\frac{8\ +\ \sqrt{20}\ R.}{6\ +\ \sqrt{11\frac{1}{4}}}$ quæ multiplicata per $\frac{8}{1}$ faciunt $\frac{48\ +\ \sqrt{720}\ N.}{8\ +\ \sqrt{20}\ R.}$

& rurſus diuiſa inuicem procreant quotum 6 præciſè. Nam 8 in 48 habetur 6 : & 720 N. diuiſa per 20 R. faciunt quotum o. Nam 20 R. faciunt 720, una radice aſſumta pro 36, quadrato ſenarij.

3. Δοκιμασία. 6 ductis in 8 + √20. fit 48 + √720 : quæ diuiſa per 6 + √11¼ procreant 8 : numerum ab initio propoſitum.

Ἐκθ. quinti caſus. *Sit ſcopus 54. N.*

Διορ. Oportet *numerum inuenire, cuius ½ & ⅓ in ſe multiplicata eum ſcopum faciat.*

Κατ. *Pono hunc numerum, qui quæritur eſſe 1 ℞. Secundum quæſtionis tenorem examino 1 ℞, cuius ½ eſt ½ ℞, ⅓ eſt ⅓ ℞, quæ in ſe ducta faciunt ⅙ ʓ. Sunt igitur æqualia ⅙ ʓ & 54 N.*

Iam diuido per ⅙ numerum maximi characteris Coſſici alterum æquationis numerum 54, & prodeunt 324, quæ indicant valorem unius

unius census, cuius radix est valor unius radicis. Est autem de 324 radix 18.

Repetitio τῦ διοϱισ. *Dico 18 eum esse numerum, cuius ½ & ⅓ in se multiplicata constituunt 54.*

σχόλιον.

In prioribus casibus facta reductione characterum Cossicorum maior character Cossicus fuit R numerus drachmae collateralis, ideoque facta diuisione quotus continuò numerum, qui quaeritur, manifestum fecit. In casu autem praesenti facta diuisione, quia ʒ & ℞ non sunt numeri collaterales, radix extrahi debuit zensica, quam ipse character nempe ʒ. significat. Per huiusmodi enim extractionem facta est aequatio inter R. & N, id est, facta est eadem proportio R. ad N, quae ʒ ad R. In omni enim progressione Geometrica incipiente ab 1, eadem semper est proportio cuiuscunque numeri ad proximè antecedentem, quae secundi ad primum, hoc est, radicis ad unitatem.

Δοκιμασία ½ de 18 est 9: ⅓ est 6. Iam sexies 9 sunt 54, scopus ab initio propositus.

Ἐκθ. sexti casus. *Sunt duo numeri in ratione dupla, qui additi tantundem efficiant quantum inter se multiplicati.*

Διορ. Oportet *illos duos numeros inquirere.*

Κατ. *Pono duos numeros esse 1 ℞, & 2 ℞. Horum enim dupla est ratio.*

2. Addo 1 ℞ ad 2 ℞, & fiunt 3 ℞: rursus duco 1 ℞ in 2 ℞ & exeunt 2 ʒ, aequales 3 ℞. Iam diuisis 3 ℞ per 2 ʒ, prouenit 1½ ℞.

Repetitio τῦ διοϱισμῦ. *Dico priorem numerum esse 1½ ℞: alterum 3 ℞ duplum prioris: & remotis characteribus priorem 1½: alterum 3. Vnitas enim exponens radicis ab unitate reiecta nihil relinquit.*

σχόλιον. In hoc casu aequatur duo collaterales numeri ʒ & R. Sola igitur diuisione opus est. Alij extrahunt radicem quadratam huius numeri 1½. Id vero perficitur auferendo characterem minorem à maiore: scilicet R. à ʒ, unde fit 1 R. aequalis 1½. Res igitur eodem recidit.

Δοκιμα-

Δοκιμασία. 3 addita ad $1\frac{1}{2}$ gignunt $4\frac{1}{2}$. Eadem 3 in $1\frac{1}{2}$ multiplicata itidem faciunt $4\frac{1}{2}$.

ἔκθ. ſeptimi caſus. *Sunt ſocÿ numero incerti, qui ſinguli contulerunt florenos in unam ſocietatem decies tot, quot ſunt. Lucrati ſunt centum florenis tot florenos, quot ipſi ſunt numero. Deniq; $\frac{1}{2}$ detracta de lucro oſtendit ſortem ſingulorum.*

Δ. Oportet *ſcire numerum eorum, qui contulerunt: & quantum ſinguli contulerint.*

Κατασκ. *Pono ſocios fuiſſe 1 ℞: ſingulorum igitur ſors fuit 10 ℞: & ſumma ſortium 10 ʒ. Lucrati ſunt 100 florenis 2 ℞ (id eſt, bis tot, quot ipſi ſunt. Sunt autem 1 ℞.) Summa lucri $\frac{1}{5}$ cf: à quo $\frac{1}{2}$ ablata relinquit $\frac{1}{10}$ cf. Aequantur igitur $\frac{1}{10}$ cf & 10 ℞. Iam diuiſis 10 ℞ per $\frac{1}{10}$ cf, exeunt 100 ʒ, quarum radix cenſica 10 N. & ſic æquantur 1 ℞ & 10 N.*

Repetitio τῦ διορισμῦ. *Dico ſocios fuiſſe 10, & ſortem ſingulorum fl. 100.*

χόλιον. In hoc caſu æquantur cubi & radices numeri non collaterales, inter quos unus numerus progreſsionis Geometricæ intercedit: eſtque exponens diuiſoris 3. diuidendi 1: differentia, 2, ſub qua cenſus continetur. In diuiſione igitur radicum per cubos emergit ʒ, unde & radix cenſica extrahitur, indicans valorem unius radicis.

Δοκιμασία. 1 R. ſunt 10 ſocij: 10 R. ſunt fl. 100, ſors ſingulorum. Ergo ſumma ſortium fl. 1000. Lucrum de centum eſt 2 R. fl. ſiue 20 fl. Ergo lucrum de fl. 1000 eſt $\frac{1}{5}$ cf. hoc modo 10 R. d. 2 R, q. 10 ʒ. d. $\frac{20}{100}$ cf. ſiue $\frac{1}{5}$ cf. Secundum doctrinam multiplicationis, traditam ſupra fol. 244. In numeris abſolutis $\frac{1}{5}$ facit 200 fl, hoc modo. 100. d. 20. q. 1000, d. 200: ſumma lucri, cuius $\frac{1}{2}$ ſunt fl. 100: quæ detracta de 200 (ſumma lucri) relinquunt 10, numerum ſociorum.

ἔκθ. octaui caſus. *Sit ſumma $400\frac{1}{8}$.*

Δ. Oportet *ſcire numerum, cuius quadrati $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ in ſe ducta, eam ſummam conſtituat.*

Κατ.

Κατασκ. Pono numerum incognitum esse 1 ℞. Erit igitur illius quadratum 1 ȝ. Iam ½ ȝ ducta in ⅓ ȝ facit ⅙ ȝȝ, æqualem 400⅙ ℈. Diuido ℈ per ȝȝ nimirum 400⅙. per ⅙ ȝȝ, exibunt 2401 ȝȝ, quorum radix censicensica est 7.

Repetitio τȣ̃ διορ. *Dico 7 esse numerum quæsitum, qui ignorabatur.* σχόλιον.

In hoc casu æquantur ȝȝ & drachmæ, numeri non collaterales, inter quos tres numeri progressionis Geometricæ intercedunt: estque exponens diuisoris 4, diuidendi o: differentia 4, sub qua ȝȝ cōtinetur. In diuisione igitur ℈ per ȝȝ exit ȝȝ, cuius radix censicensica indicat valorem 1 R.

ἐκθ. noni casus. *Sunt numero incerti tribuni militum in exercitu, quorum singuli sub se habent tot vexilla, quot sunt tribuni: & sub singulis vexillis tricies tot milites, quot vexilla in exercitu. Habet autem quilibet tribunus stipendium fl. 150: & quilibet miles stipendium tot florenorum, quot sunt tribuni. Deprehensum est autem omnium stipendium menstruum esse centies vicies quinquies tot florenorum, quot sunt tribuni militum.*

Δ. *Quæritur, quotnam fuerint tribuni militum, & quot milites?*

Κατ. *Pono 1 ℞ tribunorum. Erit igitur 1 ȝ vexillorum: & quodlibet vexillum 30 ȝ militum. Summa omnium militum 30 ȝȝ Nunc stipendium militum supputo sic dicendo. 1 miles habet stipendium 1 ℞ fl. Ergo 30 ȝȝ: habebunt 30 ß fl. Hinc stipendium tribunorū sic supputo. 1 tribunus habet stipendium 150 fl. Ergo 1 ℞ habebit stipendium 150 ℞ fl. quæ ducta in 125 faciunt 18750 ℞, æquales 30 ß. Tandem diuido numerum minoris Cossici per maiorem, & emergit ȝȝ 625, cuius radix censicensica est 5: ut apparet ex tabella, fol. 155.*

Repetitio τȣ̃ διορ. *Dico tribunos militum fuisse quinq: milites 18750.*

σχόλιον.

In hoc casu æquantur R. & ß, numeri non collaterales, inter quos tres numeri progressionis Geometricæ intercedunt: estque exponens diuisoris 5, diuidendi 1, differentia 4, sub qua ßß continetur (ut habetur fol. 205.) In diuisione igitur R. per ß exit ßß 625, cuius radix 5 indicat valorem unius radicis.

Δοκιμασία. 1 ℨ vexillorum, facit vexilla 25. Census enim quinarij est 25. 30 ℨ sunt 750 milites sub uno vexillo: 30 ßß sunt 18750, summa omnium militum. Stipendium unius militis sunt 5 fl. Ergo stipendium omnium sunt fl. 93750, æquale ß 30. Valet enim surfolidus in progresſione quintupla 3125, quæ per 30 multiplicata faciunt 93750.

Ἔκθ. decimi casus. *Est numerus incertus, cuius $\frac{1}{3}$ in seipsam ducta, & productum in $\frac{1}{4}$ ipsius numeri, constituunt numerum, cuius radix quadrata est ipse numerus, qui quæritur.*

Δ. *Quæritur, quisnam sibi ille numerus incertus?*

Κατ. *Pono numerum incognitum esse 1 ℞, cuius $\frac{1}{3}$ ℞ ducta in $\frac{1}{3}$ ℞ facit $\frac{1}{9}$ ℨ. Iam $\frac{1}{4}$ ℞ ducta in $\frac{1}{9}$ ℨ constituit $\frac{1}{36}$ ℭ æqualem 1 ℨ: qui scopus est. Facta diuisione 1 ℨ per $\frac{1}{36}$ ℭ oritur 36 numerus quæsitus.*

Repetitio τῦ διορ. *Dico numerum, cuius circumstantia in ἐκθέσει enumerantur, esse 36.*

Χύλων. In hoc casu cubi & quadrati, numeri collaterales æquantur: nec opus est extractione radicum: estq; valor unius radicis 36. Probatur sic. Nam $\frac{1}{3}$ de 36 est 12: $\frac{1}{4}$ est 9. Iam 12 in seipsa ducta faciunt 144, quæ iterum per 9 multiplicata procreant 1296, quorum radix quadrata est 36.

σχόλιον.

1. Algebræ nomen esse Arabicum, vel Hebræum potius (cognatæ enim sunt linguæ) eruditi existimant: formatum ab Al articulo, & Gabar, quod est, prævaluit, eminuit, superauit, quod sit regula ὑπερτάτη, suprema, gubernatrix aliarum regularum uberrima. Cum Gabar enim cognationem habet Græcum ὑπερ super: & κυβερνάω, guberno: & Cabbir, siue abbir, copiosus, & uber fuit. Alij Cossam siue regulam Cossæ, siue Cossicam vocant κατ' ἐξοχὴν, à verbo Hebræo casas, quod est, computauit per summam, unde & Germanicum

manicum Coßiter. Nomen igitur quod proprie totam Arithmeticam significat: parti illius præcipuæ & maximè insigni tribuitur. Amulchabulam etiam Arabes vocant, quasi ἄμαλλαν (ab Hebræo alam, id est, ligauit in manipulos) manipulum siue fasciculum cabalarum: quod manum compleat multis cabalis: unde & latini artē magnam, & occultam partem numerorū: & scientiam creaturæ & creaturarum: & reginam scientiarum vocant: Græci etiam analyticam, quasi solutoriam: quod labyrinthos numerorum alioquin inexplicabiles soluit & explicat: idq; per rem & censum, id est, per radicem & quadratum: unde & regulam rei & census latini dixerunt. Quidam etiam quadraturam, à quadrato, quam Algebrai cēsum vocant. Potest vero appellari, & regula unius: ut regula Falsi, regula binorum: regula aurea, trium numerorum. Vnum enim tantum pro re ignota ponit: & unius illius partes partibus rei ignotæ respondentes comparat.

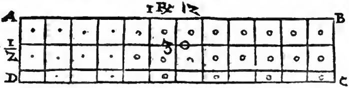
2. Hæc igitur regula, ut & tota Arithmetica, accepta est à primis patribus: excultaq; postea à Phœnicibus, Græcis & Arabibus: & tandem à Latinis. Nam & nomina illius prima sunt Hebraica: posteriora Græca, Arabica, Latina: & tantum ingenij humani acumen in ea sparsum: ut non ex alio quàm aureo seculo, in quo τὸ ἡγεμονικὸν excelluit, originem suam habere potuerit. Falluntur igitur, qui illius primam inuentionem vel Gebro Arabi, vel Mahometi Moysis Arabis filio: vel Diophanto Pythagoreo tribuunt.

3. Pro una radice possunt interdum plures radices poni hoc modo: 2 ℞, vel 3 ℞: &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quæstionis propositæ. Operatione autem peracta secundum regulam Algebræ, inuenitur valor unius tantum radicis, qui ducendus est in positam radicem, id est, 2, 3, 4, &c. ut habeatur numerus quæsitus. V. G. In exemplo primi casus, si pro numero abscondito ponantur 2 ℞ duplum illius est 4: dimidium 1: quæ coniuncta 5 ℞ procreant: æqualia 30. Iam 30 diuisis per 5, exeunt 6: valor unius radicis: quæ

ducta in positas 2 ℞ gignunt 12, numerum quæsitum. Eadem est ratio aliarum radicum.

4. Algebræ partes sunt duplices: principales & minus principales. Principales sunt omnino necessariæ, eæq; duæ: inuentio æquationis, & diuisio. Minus principales, sunt non semper necessariæ, eæq; itidem duæ: reductio æquationis, & extractio radicis ex quoto.

5. Æquationis duos terminos quidam vocant continens & contentum. Continens est numerus ex tractatione 1 ℞ ortus: Geometris datum unum latus. Contentum est scopus, in quæstione positus: Geometris area. Sunt vero & alij æquationis termini, nempe 1 ℞ & numerus ignotus, qui quæritur. V. G. in exemplo primi casus æqualia sunt $2\frac{1}{2}$ ℞ & 30 N: sic æqualia sunt 30 & 12 N. Quod vero sint æqualia, id sic demonstro. Sit figura quadrangularis abcd: cuius area 30, est scopus: ad $2\frac{1}{2}$ ℞ latus longitudinis: ab 1 ℞ siue



12, latus latitudinis. Hic 1 ℞ est linea quædam partium sub certo quodam numero, nempe 12. $2\frac{1}{2}$ ℞ longitudinis æquantur huic numero 30: quia duæ lineæ cum dimidia, siue $2\frac{1}{2}$ ℞ longitudinis complent totam figuram continentem partes 30. Similiter 12 latitudinis eidem numero 30 æquales sunt. Totam enim figuram habentē partes 30 constituunt 12 lineæ latitudinis. Aliter sic. Si ab æqualbus æqualia auferantur, quæ remanent sunt æqualia. Æqualia sunt 12 ℞ & 30: à quibus subtrahatur unum commune 4 ℞. Ergo residua 8 ℞ & 30—4 ℞ sunt inter se æqualia. Δοκιμασία. Nam 8 ℞ latitudinis in schemate superiori continent partes siue cellulas 20 (si multiplices 8 per $2\frac{1}{2}$) at 4 ℞ faciunt 10. (si multiplices 4 per $2\frac{1}{2}$) Sublatis autem 10 ex 30 relinquuntur 20, hoc modo.

Residua

12 ℞ —— 30

4 4 ℞.

Residua 8 ℞ 30 —— 4 ℞.

Aequalia p δοκιμ. 20. ———— 20.

Similiter aequalia sunt $2\frac{1}{2}$ ℞ & 30: à quibus subtrahatur unum commune 2 ℞. Ergo residua $\frac{1}{2}$ ℞ & 30 —— 2 ℞ sunt inter se aequalia. δοκιμασία. Nam $\frac{1}{2}$ ℞ continet partes siue cellulas integras 6 (si multiplices $\frac{1}{2}$ per 12) at 2 ℞ faciunt 24 (si multiplices 2 per 12) sublatis autem 24 ex 30, relinquuntur 6, hoc modo.

Aequalia $2\frac{1}{2}$ ℞ —— 30

Vna pars 2 ℞ —— 2 ℞

Residua $\frac{1}{2}$ ℞ 30 —— 2 ℞

Aequalia per δοκιμ. 6. ———— 6.

6. Hinc sequitur varias esse permutationes aequationum per subtractionem unius communis. Aequalia enim sunt $2\frac{1}{2}$ ℞ & 30. Rursus 12 ℞ & 30. Sic 8 ℞ & 30 —— 4 ℞. Rursus $\frac{1}{2}$ ℞ & 30 —— 2 ℞.

7. Variatur autem quaecunque aequatio non tantũ per subtractionẽ: sed & per additionem, multiplicationem & diuisionem, necnon aequalitatem radicum & quadratorum. Nam si utrique termino aequationis idem commune addatur: aut certè uterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidaturúe: remanebit illaesa aequatio sub terminis mutatis, ut docetur in fine huius libri.

8. Quidam Algebraeorum aequationem faciunt duplicem: simplicem & compositam. Simplex est in qua unus terminus uni termino aequatur: ut ʒ & ℞: aut ℞ & N: aut ʒ & N. Inter hos enim tres primos terminos progressionis Geometricae ab unitate incipientis aequationes potissimum considerant. Composita est, in qua semper duo termini uni termino adaequantur: ut ʒ ✠ ℞ & N: ʒ & ℞ ✠ N: ʒ & N ✠ ℞ (quod idem est cum priore:) ʒ ✠ N & ℞. Pro quibus aequationibus sex regulas praescribunt, magno cum incommo-

 do discen-

do discentium. Regula enim unica, quam supra recitauimus, sola sufficit ad omnes casus, cum reductionem præcipiat, quæ semper 1 ʒ in una parte æquationis ponit: cum in altera parte signa ✠ & --- rejicit, & ad simplices terminos redigit.

9. DIVISIO, quam præcipit regula Algebræ est compendium regulæ trium. Nam si, verbi gratia, $2\frac{1}{2}$ ℞ æqualia sunt huic numero 30: inquirendum est, cui numero 1 ℞ æqualis sit? Sic igitur procedo secundum regulam trium. $2\frac{1}{2}$ ℞. d. 30. q. 1 ℞ d. 12. Idem igitur numerus producitur breuius ex diuisione 30 per $2\frac{1}{2}$, prolixius ex operatione per regulam trium. Eadem diuisio colligitur ex sententia diuisionis. Data area rectanguli & uno latere dabitur alterum latus per diuisionem. Hic enim data area rectanguli superioris ac *est 30: unum latus* ab *est $2\frac{1}{2}$. Ergo per diuisionem alterum latus* ab *est 12: numerus idem, qui antea.*

10. Ex quo & id sequitur, ut quotus ex diuisione prodiens sit valor unius radicis, siue numerus ignotus, qui quæritur. Nam ut diuidendus ad diuisorem: sic quotus numerus ad unitatem se habet: & contrà.

11. Reductio æquationi accidit: ac ita quidem ut nec semper nec omnino sit necessaria. Tum enim est necessaria, cum diuisio fieri non potest, ut aiunt Algebrai. Omnino autem non est necessaria, cum diuisio secundum artem lib. 5, descriptam facta eam commodissimè exhibeat. Hoc vero commodum adfert præmissa reductio, quod diuisionem facit expeditiorem, ne præcepta supra de diuisione tradita repetere necesse sit. Contra repetenda sunt tantum ea, quæ de reductione fol. 214. proponuntur.

12. Extractio diuisioni accidit, ut reductio æquationi. Est autem & necessaria, & non necessaria.

Necessaria cum maximus character Cossicus æquationis, qui solus statuitur, maior est quàm ℞, & numerus absolutus in altera parte reperitur. Tum enim ex diuisione inuenitur æstimatio unius zensi.

vel

vel cubi, vel zensizensi, &c. Extrahenda igitur radix, quam ipse character significat, ut inueniatur æstimatio unius radicis, quæ primum ponitur, ut in exemplo quarti casus.

Non est necessaria, cum numeri æquantur, inter quos minor est drachmâ maior, aut maior character Cossicus fuerit ℞. In priore enim casu reductio fieri potest ad minimos terminos abbreuiatis characteribus: & tum fit æquatio inter ℞ & N: in altero casu quotus nulla præmissa reductione indicat precium radicis: V. G. Sit 1 ʓ æquatus 3 ℞, hic minor Cossicus nempe ℞ est maior drachmâ: unde abbreuiatis characteribus per subtractionem exponentium à se inuicem fit 1 R æqualis 3 N. Sit vero 1 R æquata 3 N, hic maior Cossicus est R: unde quotus ex diuisione ortus precium radicis mox indicat. Vtrobiq; igitur extractione radicis opus non est.

13. Regula Algebræ est thesaurus artis incomparabilis, ex qua quæstiones, quæ videntur inexplicabiles, solui & explicari possunt. Quod si non soluantur, culpa non in Algebram transferenda est, sed in Arithmeticum, qui vel nescit extractiones radicum: vel doctrinam de numeris irrationalibus: vel Geometriam, aliamúe aliquam scientiam, ex qua quæstio oritur.

14. Sunt tamen quæstiones quædam, quæ per regulam Algebræ solui non possunt: ut sunt eæ, quarum æquatio est impossibilis vel nugatoria.

Impossibilis, ut si proponatur numerus 12 diuidendus in tales duas partes, ut $\frac{1}{3}$ unius cum $\frac{1}{4}$ alterius efficiat 4. Ponatur enim pro una parte 1 R: eritq; altera 12 --- 1 R. (Nam 1 R subtracta à 12, facit 12 --- 1 R.) Tertia pars unius est $\frac{1}{3}$ R: & quarta alterius, 3 -- $\frac{1}{4}$ R. (Nam 12 --- 1 R, diuisis per 4 fiunt 3 --- $\frac{1}{4}$) quæ coniuncta efficiunt 3 ✠ $\frac{1}{12}$ R. (Nam ex ✠ $\frac{1}{3}$ R. & 3 --- $\frac{1}{4}$ R. fit 3 --- $\frac{1}{2}$ R) quæ æqualia esse debent numero 4. Ablatis utrinq; tribus, erit æqualitas inter $\frac{1}{12}$ & 1, hoc modo. 3 --- $\frac{1}{12}$ ℞. 4

	3	3
Residua	$\frac{1}{12}$ ℞.	1.

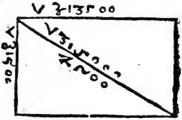
Itaq;

Itaq; 1 diuiso per $\frac{1}{12}$ fiet 1 ℞ 12, prima pars numeri 12, & altera pars 0, quod est impoßibile. Neq; enim potest fieri, ut una pars sit totum, & altera nihil.

Nugatoria, ut si quæratur numerus, quo multiplicato per 2, & producto in seipsum ducto, faciat numerum æqualem ei, qui ex numero in seipsum ducto producitur, & ex producto in 4. Ponatur enim numerus esse 1 ℞: eritq; per 2 multiplicatus 2 ℞: per seipsum erit 4 ℥. Et quia 1 R. ducta in se gignit 1 ℥, & ex 1 ℥ in 4 fiunt 4 ℥: inuenta erit æquatio inter 4 ℥ & 4 ℥, quæ nugatoria est & inepta. Idem enim sibiipsi æquale esse ineptè dicitur. Habet igitur regula Algebræ hanc excellentiam, ut ex ipsa operatione doceat, num quæstio, quæ proponitur, solui poßit nec'ne. Quæstio vero secunda, eaq; nugatoria exerceri potest in omni numero. Nam v. g. ex 12 in 2 fiunt 24: & ex 24 in se fiunt 576: quantum videlicet fit ex 12 in se (unde fit 144) & ex producto in 4. Inde enim & prior numerus 576 nascitur. Et sic de alijs numeris omnibus.

15. Sunt & quæstiones quædam inexplicabiles numeris, eaq; ut plurimum Geometricæ, quas etiam inter impoßibiles quidam recensent. Neq; enim constant numeris, qui in rerum natura reperiantur. V. G. Si proponatur tectum quadrangulare 4500 tegularum, & longitudo tripla est latitudinis: quærantur autem latera & diameter quanta sint? Ponatur latitudo 1 R, & longitudo 3 R. Hæc latera inter se multiplicata producunt aream 3 ℥, æqualem 4500. Iam diuisis 4500 per 3 fit 1 ℥, 1500, & 1 R, √ ℥ 1500. (Neq; enim 1500, est numerus verè quadratus) latitudo rectanguli: & eius triplum √ ℥ 13500 erit eiusdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area √ ℥ 20250000, hoc est, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000, æquale duobus quadratis laterum: & ipsa diameter erit √ ℥ 15000, id est, quæsitum latus tetragonicum siue diameter erit 123, minus 129.

16. Logi-



16. *Logiſtica Aſtronomica in numeratione & inſtrumentis ſupputationis magnam cum Algebra cognationem habet. Integrum enim eſt ſimile drachmæ ſiue puncto: 60 integra ordine in longum diſpoſita repræſentant unam lineam, quæ prima ſexagena dicitur: tum 3600 integra in latum diſpoſita, quod fit cum linea dicta ſexagies ſumitur, efficiunt figuram quadrati, quæ eſt una ſecunda ſexagena: tandem cum hanc quadrati figuram ſibi ſexagies accumulabis in altum, produces cubum, qui eſt 1. tertia ſexagena in ſe continens integra 216000. Quod ſi ulterius progrediens, induet cubus naturam puncti, & quarta ſexagena habebit lineam ſolidam: quinta ſexagena quadratum ſolidum: ſexta ſexagena iterum cubum: & ſic deinceps fit progreſſus per lineam, ſuperficiem & corpus. Sexagenæ igitur, ut & figuræ Geometricæ, ingentem integrorum multitudinem continent. In ſcrupulis ſunt ſimiles figuræ Geometricæ, quarum ſpecies non aliquam integrorum multitudinem, ſed unius integri quam plurimas particulas comprehendunt: ut unum integrum ſecetur in 60 particulas æquales: quæ in longum diſpoſitæ conſtituunt quandã lineam, cuius partes dicuntur prima ſcrupula. Deinde nam lineæ ſingulæ particulæ in alias 60 particulas æquales ſubdiuiſæ dant 3600 particulas, quæ in latum diſpoſitæ efficiunt quadrati figuram, cuius ſingulæ partes dicuntur ſecunda ſcrupula. Ruſus huius quadrati ſingulæ particulæ iterum in 60 alias multò minores particulas diuiſæ, in ſumma efficiunt particulas 216000, quæ in altũ diſpoſitæ*

Ccc figuram

figuram cubi constituunt, cuius singulæ particulæ scrupula tertia dicuntur: & sic deinceps ad alias atq; alias figuras descendatur, quæ quò plures, hoc minores & tenuiores unius integri particulas complectuntur. Eadē est conuenientia in multiplicationibus, diuisionibus & extractionibus radicum: in quibus utrobiq; producti species mutatur.

17. Regula Algebræ continetur sub regula trium: & continet suo ambitu tum regulam trium, tum omnes alias Arithmeticæ regulas, ut conuersam, duplicem, societatis, de intercapedine temporis diuersi in consortio, alligationis, regulam Falsi & virginum.

Continetur à regula trium; quia sua omnia ad regulam trium reducit, ut apparet ex apodixi, quam supra in exemplo primi casus tradidimus. Et diuisio maximè principalis pars Algebræ, quæ ex duobus æquatis elicit quæsitum nihil est aliud quàm compendiosa operatio per regulam trium.

Continet regulam trium, directam: ut exemplum primi casus
Fol. 309. *supra per regulam trium supputatum regula Algebræ sic explicat.*

Vl. fl. Vl. fl.
14. d. 6. q. 7. d. 1 ℞.

Pro numero incognito pono 1 ℞, quæ quantum valeat, ostendit illud axioma regulæ trium. Productum extremorum est æquale producto intermediorum. Est autem productum extremorum 14 R, productum intermediorum 42. Aequantur igitur 14 R & 42 N. Iam 42 diuisis per 14 R prodeunt 3, valor unius radicis, idemq; numerus quæsitus, quarto loco ponendus.

Regulam trium reciprocam, ut exemplum secundi casus supra per regulam reciprocam supputatum regula Algebræ ad calculos sic re-
Fol. 317. *vocat.*

fl. lib. fl.
1. d. $5\frac{1}{4}$. q. $4\frac{1}{2}$. d. 1 R.

Pro numero incognito pono 1 R, quæ quanti sit valoris ostendit illud

illud axioma regulæ reciprocæ. Productum duorum priorum eſt æquale producto poſteriorum. Eſt autem productum duorum priorum $5\frac{1}{4}$: productum poſteriorum $4\frac{1}{2}$ ℞. Aequantur igitur $5\frac{1}{4}$ & $4\frac{1}{2}$ ℞. Iam $5\frac{1}{4}$ diuiſis per $4\frac{1}{2}$ ℞ fiunt $\frac{42}{36}$, id eſt, $1\frac{1}{6}$: valor unius radicis, idemq́ue quartus proportionalis. Fol. 312.

Regulam duplicem, ut exemplum primi caſus ſupra per regulam duplicem ſupputatum regula Algebræ ſic computat. Fol. 322.

Boues. Dies. Iugera. Boues. Dies. Iugera.
10. 7. d. 35. q. 20. 24. d. 1 ℞.

Pro numero incognito pono 1 ℞, quæ ut cognoſcatur quanti ſit precij, neceſſe eſt prius quinque numeros reduci ad regulam trium ſimplicem per multiplicationem boum in tempus, hoc modo.

70. d. 35. q. 480. d. 1. ℞.

Iam productum extremorum 70 ℞ eſt æquale producto intermediorum, 16800. Diuiſis igitur 16800 per 70 ℞ prodeunt 240, numerus idem, qui per vulgarem Arithmeticam inuentus fuit. Ducuntur autem boues in tempus, tum ob cauſam ſupra recitatam, tum quia unus in 70 diebus tantum arat, quantum 10 in 7: & tantum unus in duobus diebus, quantum duo in uno. Fol. 325.

Eadem eſt ratio ſecundi caſus, in quo quinque numeri reducuntur ad tres per multiplicationem decuſſatim factam.

Regulam ſocietatis continet, ut exempli ſecundi caſus, ſupra per regulam ſocietatis ſupputati, rationes ſubducit Algebra, hoc modo. Diſpono numeros ad ſimilitudinem regulæ trium, ut præcipit regula ſocietatis: deinde pro numeris ignotis pono 1 ℞: tum extremos in ſe duco: & ſimiliter intermedios in ſe: unde proueniunt bini æquationis numeri: quorum unus per alterum diuiſus quotum procreat, valorem unius radicis, hoc modo. Fol. 328.

225. d. 500. q. 50. d. 1 ℞

25000

225 ℞

225. d. 500. q. 75. d. 1 ℞

37500

225 ℞

225. d. 500. q. 100. d. 1 ℞

50000

225. ℞.

Erit igitur valor radicis unius pro primo 111 $\frac{1}{9}$: pro secundo 166 $\frac{6}{9}$: pro tertio 222 $\frac{2}{9}$: ut & supra ex vulgari praxi idem innotuit.

Exempla regulæ de intercapedine temporis diuersi in consortio regula Algebræ similiter expedit suo modo eoq; subtiliore, quàm vulgaris Arithmetica: ut & regulam duplicem, quæ huic respondet: cuius exemplum supra posuimus.

Regulam alligationis, ut exemplum primi casus supra per regulã alligationis computatum regula Algebra ad calculos sic reuocat.

Pono 1 ℞ pro mensura vilioris vini: & 1 -- 1 ℞ pro mensura vini preciosioris. Tunc instituo regulam trium bis, hoc modo.

Primi vini	*mensura*	*cr.*	*mensura*	*cr.*
	1.	6.	1 ℞.	6 ℞.
Secundi vini -----	1.	12.	1 -- 1 ℞	12 -- 12 ℞.

Igitur 6 ℞ & 12 --- 12 ℞, 12 --- 6 cr. (per reductionem) æquatur 10 cr. Additis igitur 6 ℞ utrobiq; erit æquatio inter 6 ℞ ✠ 10 & 12: ablatisq; 10, utrinq; inter 6 ℞ & 2. Diuisis igitur 2 per 6 fiet 1 ℞ $\frac{1}{3}$. De viliore igitur vino recipienda est $\frac{1}{3}$ unius mensuræ: & de præstantiore $\frac{2}{3}$ unius mensuræ.

Regulam Falsi contineri in regula Algebræ exemplo primi casus per regulam Algebræ supra supputato demonstrari potest. Eiusdem enim quæstionis rationes regula Falsi sic subducit.

Prima hypothesis 6. Opus 15. Error prioris operis --15.

Secunda hypothesis 10. Opus 25. Error secundi operis -5.

Differentia errorum 10, differentia hypotheseon 4. Iam

Iam sic dico.

Diff. err.	diff. hyp.	Error prioris operis.	Error prioris hy.
10. d.	*4. q.*	*15. d.*	*6.*

Iam 6 addita hypothesi prima 6 faciunt 12 verum numerum.

		Error secundi operis.	Error secundæ hypoth.
Et 10. d.	*4. q.*	*5. d.*	*2.*

Iam 2 addita hypothesi secundæ 10 faciunt 12, ut antea. Ex tot vero numeris, quibus regula Falsi utitur, quiuis animaduertit regulã Falsi cedere regulæ Algebræ & breuitate & perspicuitate operis.

18. Regulæ virginum viam expeditiorem docet regula Algebræ hoc modo. Repetatur exemplum supra positum in 3 scholio regulæ consortij, diuersi temporis. Ad hoc respiciens pono 1 ℞ pro numero virorum 19. pro numero mulierum. Erunt igitur virgines 12 --- 1 ℞ --- 1 9. Iam sic dico. Fol. 357.

1 Vir accipit 6		*1 ℞*	*6 ℞*
1 Mulier accipit 4	*Ergo*	*1 9. accipiet*	*4 q.*
1 Virgo accipit 2		*12 --- 1 ℞ --- 1 9.*	*24 --- 2 ℞ --- 2 q.*

Rursus additis 24 --- 2 ℞ --- 2 q. ad 6 ℞ ✠ 4 q. gignunt 24 ✠ 4 ℞ ✠ 2 q. æqualia 36 ℞. Quæ reducta per subtractionem 24 --- 4 ℞ à 36 relinquunt 12 --- 4 ℞ æqualia 2 q. Iam 12 --- 4 ℞ diuisa per 2 q. faciunt 6 --- 2 ℞. Tantus est numerus mulierum, cui addita 1 R. (numerus virorum) gignit 6 ✠ 1 R. numerum virginum. Sit autem valor unius radicis duo. Erit igitur numerus utriusq; sexus personarum, ut & supra fuit supputatum, sic.

Viri	*1 R. ----- 2*	*fl.*	*12*
Mulieres	*6 --- 2 R. --- 2*	*Accipiunt*	*8*
Virgines	*6 ✠ 1 R. --- 8,*		*16*
	Summa --- 12.		*Summa --- 36.*

Lucra singulorum supputantur multiplicatione partium per numerum utriusq; sexus personarum. Viri igitur duo accipiunt fl. 12,

quia unus vir senos sibi attributos habet. Sic una mulier quaternos: una virgo binos.

19. Regula Algebræ cognata est regulæ Falsi. Nam & in regula Falsi, ut in regula Algebræ unitas pro vero numero poni potest: ut in exemplo primi casus regulæ Falsi, scopus est 65. Quæritur autem numerus, cuius dimidium, triens & quadrans eam summam constituat. Loco igitur veri numeri accipiam 1, cuius partes datæ sunt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$, *quæ addita faciunt* $1\frac{1}{12}$ *siue* $\frac{13}{12}$. *Debebant autem esse 65. Iam sic dicam. Si* $1\frac{1}{12}$ *essent 65, quid 1. Facta operatione & diuisione 65 per* $1\frac{1}{12}$ *veniet 60, numerus quæsitus, hoc modo.*

$$\frac{65}{1} \times \frac{12}{13} \;\Big|\; \frac{780}{13} \;\Big|\; 60.$$

Et per regulam Falsi, similiter ut per regulam Algebræ, omnia exempla regulæ Detri solui possunt.

20. Differt autem regula Falsi à regula Algebræ, quod in illa hypotheses aliæ præter unitatem poni solent: quæ veris numeris æquales non sunt: in hac autem hypothesis quæ assumitur semper æqualis est vero siue quæsito numero. Et in regula Algebræ numeri ineffabiles tractari possunt: in regula Falsi non item.

21. Ex abstractis numeris contracti: & contrà ex contractis abstracti fieri possunt, idq; varijs modis. V. G. Quæstio primi casus, quæ de numero abstracto proponit, ad numeros contractos sic redigi potest.

Quidam pecuniam debet alteri, cuius duplum & dimidium coniuncta 30 faciunt. Quæritur quanta sit summa illius?

Altera quæstio in secundo casu de ætate Ephæstionis ad numeros abstractos sic reuocari potest. Quæruntur tres numeri, quorum primus secundum binario superat: tertius verò ambos quaternario: atq; ij tres simul positi efficiunt 96.

Tertia quæstio de ignota summa aureorum, & pondere mulæ & asini numeris abstractis sic mutari potest. Quæritur numerus, à quo subtracta unitas, & addita alteri faciat duplum prioris: subtracta

vero

verò ab altero & addita priori faciat æqualia? & sic de cæteris.

20. Δοκιμασία exemplorum regulæ Algebræ fit per resolutionem radicis secundum ænigmatis processum: ut in primo casu numerus inueniendus fuit 12, cuius duplum & dimidium coniuncta faciunt 30. Et sic de alijs.

22. Quidam ex neotericis, inter quos N. Raimarus Vrsus duas tantum Algebræ partes faciunt, inuentionem æquationis, & inuentæ æquationis reductionem. Reductionis autem nomine intelligunt nouem modos variandi æquationem, quos supra lib. 5. attigimus: hic vero distinctius tanquam apicem totius artis recensere non inutile videtur.

Tres formas priores gubernat 2 & 3 principium Euclidis. Si æqualia addideris vel subtraxeris æqualibus, quæ fiunt erunt æqualia: producta videlicet vel residua.

1. Si absolutus numerus vel 0 æquatur numero Cossico, affecto signo prosthaphæretico, adde vel subtrahe, prout signa requirunt (si- Fol. 214.
gna autem eadem demunt numero: diuersa sed addunt) *absolutum numerum, cum vel ex absoluto, ut.*

2 ℞ ✠ 4. æq. 8. Ergo 2. æq. 4. Hic 4 subtrahuntur ab utroq;
4. 4. numero absoluto, propter idem signum ✠.

2 ℞ --- 0 - --- 4.

2 ℞ --- 4. æq 8. Ergo 2 ℞ æq. 12. Hic 4 adduntur ad 8, &
4. 4. subtrahuntur à 4, quia signa sunt diuersa.

2 ℞ --- 0. æq. 12.

8 ℞ --- 4. æq 0. Ergo 8 ℞ æq. 4. Hic 4 adduntur ad 0 &
4 4. subtrahuntur à 4, quia signa diuersa.

8 ℞ --- 0 ---- 4.

8 ℞ ✠ 4. æq. 0. Ergo 8 ℞ æq. 0 --- 4. Hic 4 subtrahuntur à
4. 4. 0 & à 4. quia signa sunt eadem.

8 ℞ 0 0 - 4.

11. Si

II. Si duo numeri compositi æquantur reuocabis eos ad simplices, partim reducendo per primum modum, partim transponendo signa, ut.

I. Prima reductio.	8 ℞ + 4 æq. 5 ℞ + 22. 4 4	*Ergo 8 ℞ æq. 5 R + 18:* *Et 3 R æqu. 18.*
Secunda reductio.	8 ℞ 0. æq. 5 ℞ + 18. 5 5	*Hic primum duo absoluti à se inuicem subtrahuntur, quia signa sunt eadem: deinde duæ radices reducuntur per subtractionem unius communis.*
	3 ℞ 0 æq. 0. 18.	

II. Prima reductio.	5 R --- 4 æq. 12. --- 3 R. 4 4	*Ergo 5 R æq. 16 --- 3 R.* *Et 8 R æq. 16.*
Secunda.	5 R --- 0 æq. 16. --- 3 R. 5 5	*Hic primũ duo absoluti subtrahuntur & adduntur, quia signa sunt diuersa, deinde fit sola subtractio, & transpositio.*
	0 0 16 æq. 8 R.	

III. Prima reductio.	3 R --- 4 æq. 5 R --- 10. 4 4	*Ergo 3 R æq. 5 R --- 6.* *Et 3 R + 6 æq. 5 R.* *Et 2 R æq. 6.*
Secunda.	3 R --- 0 æq. 5 R --- 6. 3 R --- + 6 æq. 5 R	*Hic primum duo absoluti subtrahuntur: deinde numeri transponuntur: & rursus subtrahuntur & transponuntur.*
Tertia.	3 R + 6. æq. --- 5 R 3 R 3 R	
	0. 6 æq. --- 2 R 2 R æq. 6.	

6 R +

6 ℞ ✠ 5. æq. 8 R --- 9.			Ergo 6 R ✠ 14 æq. 8 R.
5		5	Et 2 R æq. 14.
6 R	0	8 R ✠ 14	Hic primum fit additio & subtractio unius communis propter signa diuersa, deinde fit trāspositio tertiò fit subtractio unius communis.
6		6	
0		2 R æq. 14	

IIII.

Vel sic.

8 R --- 9. æq. 6 R ✠ 5		
9		9
8 R	0	6 R ✠ 14
6		6
2 R	0	0 æq. 14.

V.

5 R --- 6 æq. 3 R.		Ergo 3 R ✠ 6 æq. 5 R.
3 R ✠ 6 æq 5 R.		Et 2 R æq. 6. Hic primum fit transpositio, deindè subtractio & transpositio.
3	3	
0 R. 6 æq. 2 R.		

III. Omnis æquatio sic est instituēda, ut numerus denominatus, si unicus fuerit separatim ac per se reliquis æquationū particulis æquetur: aut si forte plures denominati fuerint, qui maxima erit denominationis, solus reliquis æquationis partibus æquiparetur, per præcedentem reductionem. V. G. inter censicos triplex fit æquatio, hoc modo.

R ✠ ℨ æq. ʒ. *Ergo* ʒ *æq.* ℨ ✠ R *siue* R ✠ ℨ. *Vulgo reg. VII.*
R --- ℨ *æq* ʒ. *Ergo* ʒ *æq.* ℨ --- R *siue* R --- ℨ. *Regula V. VI.*
ʒ ✠ R *æq.* ℨ. *Ergo* ʒ *æq.* ℨ --- R, *siue* R --- ℨ.
ʒ --- R *æq.* ℨ. *Ergo* ʒ *æq.* ℨ --- R *siue* R --- ℨ.
ʒ ✠ ℨ *æq.* R. *Ergo* ʒ *æq.* ℨ --- R *siue* R --- ℨ.
ʒ --- ℨ *æq.* R. *Ergo* ʒ *æq* ℨ --- R *siue* R --- ℨ.

Tres formas medias, 4, 5, & 6 gubernant duæ propositiones Euclidis 17 & 18, lib. 7. Si æqualia multiplicaueris aut diuiseris per æqualia, quæ fiunt erunt æqualia.

IIII. per multiplicationem. Reductio fractionum mixtarum æquatarum cum fractionibus vel integris ad duos terminos fit primum vulgari reductione fractionis mixtæ ad simplicem: deinde reductione ad æquales denominatores per alternam multiplicationem numeratorum & denominatorum inter se: tandem reductione fractionum ad numeros integros per abiectionem communis denominatoris, ut $1\frac{3}{5}$ æq. $\frac{826}{48}$R — 13, reductio mixtæ fractionis ad simplicem est sic $\frac{8}{5}$. Reductio duarum fractionum $\frac{8}{5} \times \frac{226}{45}$R. — 13, ad æquales denominatores est sic. $\frac{384\,R.\cdots 8\frac{2}{3}}{240\cdots 53}$ æq. $\frac{4480.}{240\cdots 53.}$

Iam abiecto communi denominatore 4480 æq. 384 R ··· 8$\frac{2}{3}$.

Exempli secundi æquatio fuit inter 4 R + 8 & 96. Ergo per primam reductionem 4 R æquantur 88, & per quintam reductionem 1 R æq. 22.

Exempli tertij æquatio fuit inter $\frac{1}{2}$ R + 2$\frac{1}{2}$ & 1 R -- 1 N. Ergo per primam reductionem 1 R æquatur $\frac{1}{2}$ R + 3$\frac{1}{2}$, hoc modo.

	1 R — 1 N.	æq.	$\frac{1}{2}$ R + 2$\frac{1}{2}$.	
Subtr.	1 N		1 N	Additio propter diuersa signa.
	1 R	0 æq.	$\frac{1}{2}$ R + 3$\frac{1}{2}$.	

Et per eandem reductionem $\frac{1}{2}$ R æquatur 3$\frac{1}{2}$, hoc modo.

	1 R æq.	$\frac{1}{2}$ R + 3$\frac{1}{2}$.		
Subtr.	$\frac{1}{2}$ R	$\frac{1}{2}$		Subtractio propter eadem signa.
Residua	$\frac{1}{2}$ R æq.	0	3$\frac{1}{2}$.	

Tertio per quartam reductionem 1 R æquatur 7, reductis fractionibus, hoc modo. $\frac{1}{2}$ R æq 3$\frac{1}{2}$, id est, $\frac{7}{2}$. Iam omisso communi denominatore manet 1 R æq. 7.

Exempli quarti casus æquatio fuit inter 8 & $\frac{8 + \surd\, 20\ R.}{6 + \surd\, 13\frac{1}{4}}$

Ergo per 4 reductionem 48 + √ 720 æq. 8 + √ 20 R. Rursus per primam reductionem 48 æq. 8. Nam 20 R subtrahuntur à 720, & relinquitur 0. Tandem per 5 reductionem 1 æquatur 6. Nam 8 diuiditur & per 8 & 48, & emergunt quoti 1 & 6. Exem-

Exempli in quinto casu æquatio fuit inter $\frac{1}{6}$ ℨ & 54 N. Ergo per octauam reductionem √$\frac{1}{6}$ ℨ est æqualis √54. Et per 4 reductionem √1 est æqualis √324. Est autem √1 unum: & √324 per extractionem 18.

Exempli in sexto casu æquatio fuit inter 2 ℨ & 3 R. Ergo per quintam reductionem 1 R. æquatur 1½. Per 2 enim numerum maioris denominationis diuiditur 3, & nascitur quotus 1½.

Exempli in septimo casu æquatio fuit inter $\frac{1}{10}$ ℭ & 10 R. Ergo per quartam reductionem 1 ℭ æquatur 100. Et per 8 reductionem 1 R æquatur 10. De utroq; enim numero radix censica extrabitur.

Exempli in octauo casu æquatio fuit inter $\frac{1}{6}$ ℨℨ & 400$\frac{1}{6}$ N. Ergo per quartam reductionem 1 ℨℨ æquatur 2401. Et per octauam reductionem 1 ℞ æquatur 7. De utroq; enim numero radix censicensica extrabitur. Radix censicensica de 2401 est 7. Nam septies 7 sunt 49: & 49 ducta in 49 pariunt 2401.

Exempli in nono casu, æquatio fuit inter 18750 ℞ & 30 ß. Ergo per sextam reductionem subtrahendo exponentem minoris characteris ab exponente maioris characteris 30 ℨℨ æquantur 18750 N. deinde per quintam reductionem 1 ℨℨ æquatur 625: & per octauam reductionem una radix æquatur 5. De utroq; enim numero radix censicensica extrabitur. Radix censicensica de 1 est 1: & de 625 est 5. Nam quinquies 5 sunt 25, & 25 ducta in 25 gignunt 625.

Exempli in decimo casu æquatio fuit inter $\frac{1}{36}$ ℭ & 1 ℨ. Ergo per quartam reductionem 1 ℭ est æqualis 36 ℨ: & per sextam perductionem 1 ℞ æquatur 36 N.

Ex quibus apparet hanc de variis generibus reductionum doctrinam esse apicem huius artis, & magnam adferre lucem regulæ Algebræ, quam & breuiorem facit, & dilucidiorem, cum fontes operationum ex tribus principiis desumtos apertè ostendat.

22. Sunt vero & multa ænigmata, ex quibus quædam sunt similia vaticiniis, quæ sine Algebra solui possunt: qualia sunt hæc.

1. Fac tabulam quadratam, in qua termini progressionis facientes numerum quemcunque quadratum ita transponantur, ut eadem summa semper proueniat ex additione omnium terminorum in uno latere inuentorum, siue latus sumatur secundum latitudinem, siue secundum longitudinem: siue secundum ambas diametros? Compositionem harum tabularum prolixiorem docet Stifelius lib. 1. cap. 3. & Franciscus Spinola libello de tabellis quadratorũ numerorum: efficaciam superstitiosam Th. Paracelsus lib. de imaginibus. Sunt autem radices numerorum quadratorum ad has tabulas aptorum (Nam 1 & 2 nullam tabulam faciunt) simplices septem, nempe 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: unde septẽ recensentur eiusmodi tabulæ, quarum singulas planetæ alicui tribuunt; ex 9 (cuius radix 3) factam Saturno: ex 16 (cuius radix 4) factam Ioui: ex 25 Marti: ex 36 Soli: ex 49 Veneri: ex 64 Mercurio: ex 81, Lunæ. Plures autem eæque infinitæ componi possunt ex radicibus numerorum compositorum. Tabella igitur Saturni ex numero 9 est hæc.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Hic summa numerorum est eadem nempe 15, octo modis sic.

Primo,	4,	9,	2,	sunt	15.
Secundo,	3,	5,	7,	sunt	15.
Tertio,	8,	1,	6,	sunt	15.
Quarto,	4,	3,	8,	sunt	15.
Quinto,	9,	5,	1,	sunt	15.
Sexto,	2,	7,	6,	sunt	15.
Septimo,	4,	5,	6,	sunt	15.
Octauo,	8,	5,	2,	sunt	15.

Tabula Iouis.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

In secunda tabella sũma singulorum laterum est 34, decem modis. Eadem est ratio aliarum tabularum.

2. Quis

2. Quis est annus martyrij S. Laurentij, descriptus versibus Iosephi à Pinu.

Annis si Tharida, claris Alcidis & actis
Prima addas stabili corpora iuncta fide:
Et capita adijcias semper crescentis Echidnæ
Astris, Neptuni, quæ fera pristis habet.
Tempus habes, iuuenis quo cratifer urbe Quirini
Vltima sub Decio Cæsare fata tulit.

Anni Abrahami	175
Labores Herculis	12
Prima corpora	4
Capita hydræ	50
Astra ceti	13
Annus martyrij	254.

3. AVG. VIND. donata est libertate, & facta urbs imperij à Friderico I. Barbarossa A. C. 1162. Annus autem nunc agitur 1609. Quæritur quot iam anni elapsi sunt? subtraho 1162 à 1609: remanent anni 447. Tot annos Augusta iurisdictionem obtinet, qualem principes, & numeratur inter primas ex 4 columnis imperij.

4. Dolium vini, quod sex capit amphoras, quæritur quot habeat mensuras, quot sextarios, quot guttulas? Capit 589824 0 guttulas, hoc modo.

```
      64   mensuræ.
       6   amphor.
     ---------------
     384   mensuræ.
       2   sextarij.
     ---------------
     768
     7680  Guttulæ.
   ---------
   61440
  4608
 5376
 --------------------
 5898240. Guttulæ.
```

5. Iudçæ longitudo est 40: latitudo 15 miliarium: quot miliaria quadrata habet tota illa regio? Facit 600 mill.

6. Scribe 1000 sine cifris? sic scribitur 999$\frac{9}{9}$. Nam $\frac{9}{9}$ significant unum integrum, quod additum ad 999, mille procreat. Idem vero facit alia quæuis fractio, cuius numerator est æqualis denominatori, ut $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c.

7. Mos est Augustæ secunda feria paschatis, ut duo iuuenes iuxta portam rubram hoc ludi cursorij genus exerceant. Vni eorum oua 100 in directum locata, & bipedalem inter se distantiam continuè seruantia in corbem pedibus duobus à primo ouo distantem ita colligenda, ut quolibet excursu non nisi unicum auferre liceat: dum uniuersa fracto nullo comportet: alteri interim facto ad vicinum pagum Göckingam dictum, semisse miliaris ab urbe distantē excursu redeundum: ut qui pensum suum primò absoluerit βραβεῖον auferat. Quæritur quantum itineris collector ouorū dicta lege conficiat? supputatio fit hoc modo. A corbe ad primum ouum hinc inde sunt 4 pedes: à corbe ad secundum 8: ad tertium *12*: ad quartum *16*, & sic deinceps progressione Arithmetica, seruato æquali excessu. Erit igitur centesimus numerus 400, hoc modo. Demta unitate à 100 remanent 99, quibus per quatuor numero excessus multiplicatis, & producto ad primum progressionis numerum addito nascitur 400 numerus ultimus Summa vero omnium terminorum pedes 20200, hoc modo. 100 & 4 addita faciunt 104, quæ ducta in dimidium locorum 50 producunt 20200, id est, stadia 32$\frac{1}{4}\frac{?}{?}$. Plerunque autem is, qui oua colligit pensum suum citius absoluit, quàm alter: unde apparet spacium Augustâ Gögginkam versus & illinc retrorsum esse ferè quincunce stadij, maius communi miliari Germanico, cum stadia 32$\frac{1}{4}\frac{?}{?}$ contineat. Comportat autem

tem collector ouorum interdum plura quàm 100 oua, ut *105*, & *107* pro varietate tempestatum & itineris sici vel humidi. Ex quo apparet distantiam duorum locorum ex collectione ouorum posse cognosci: quod imperito Arithmeticæ impossibile videtur.

8. Conuictores duodecim ad mensam sedentes in scamno, quæritur, quot modis inter se ordinem sessionis mutare possint, manente semper eodem numero conuictorũ? Cape tot numeros in serie naturali, quot sunt res, initio facto ab unitate, & illos omnes inter se multiplica. Procreatus enim numerus ostendet propositum, hoc modo. Numerorum series est hæc. *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.* Iam sic dico. Semel 2 sunt 2, bis 3 sunt *6*: quater *6* sunt 24, quinquies 24 sunt *120*: sexies *120* sunt 720: septies *720* sunt 5040: octies 5040 sunt 40320: nouies 40320 sunt 362880: decies 362880 sunt 3628800: undecies 3628800 sunt 39916800: duodecies 39916800 sunt 479'001'600. Tot igitur modis inter se varijs conuictores duodecim sedentes in scamno sessiones facere possunt. Nam numeri propositi inter se multiplicati eum numerum procreant. Eadem ratione duæ res, v. g. A, B duobus modis variari possunt. Nam quæuis primum occupabit locum, hoc modo. A B, B A, quoniam hi numeri *1, 2,* inter se multiplicati efficiunt 2. At tres res possunt sex modis variari. Nam hi numeri *1, 2, 3* multiplicati inter se faciunt *6*. Nam unaquæque res primum tenebit locum semel, & reliquæ duæ bis possunt mutari inter sese.

Quod si non maneat idem numerus rerum: sed binæ tantum combinationes sumantur: numerus combinationũ sic inuenitur. Numerum rerum multiplica per numerũ proximè minorem. Producti numeri medietas indicabit numerum combinationũ, quæ fieri possunt inter res propositas. V. G.

V. G. Inter quatuor qualitates primas sex combinationes fieri possunt Nam 4 multiplicata per 3 efficiunt 12: cuius dimidium sunt sex. Possibiles autem sunt 4: impossibiles 2: unde & quatuor tantum elementa recensentur. Sic inter quinque prædicabilia, decem tantum combinationes fieri possunt, quot videlicet & Porphyrius in sua isagoge enumerat.

Diuersas autem & plures comparationes sic inuenies. Accipe tot numeros incipiendo ab unitate in dupla proportione, quot res sunt propositæ: & à summa omnium illorum subtrahe numerum rerum. Reliquus enim numerus indicabit, quotnám comparationes diuersæ effici possint: ut in supra dictis quatuor qualitatibus, numeri in dupla proportione iuxta numerum rerum erunt 4, nimirum 1, 2, 4, 8: quorum summa est 15: abiectis ergo 4 remanent 11. Tot igitur modis diuersis coniũgi poterunt quatuor primæ qualitates, videlicet hæ: caliditas frigiditas: caliditas, siccitas: caliditas humiditas: frigiditas siccitas: frigiditas humiditas: siccitas humiditas: caliditas frigiditas siccitas: caliditas siccitas humiditas: frigiditas siccitas humiditas, caliditas frigiditas humiditas: & demum caliditas frigiditas siccitas humiditas.

Sic ex 23 literis dictiones siue diuersæ coniunctiones fient numero 8388584.

9. Tabellarius singulis diebus 6 miliaria eundo absoluit: & iam tertius post suum abitum dies agitur: ut sic 18 miliaria peragrauerit. Quarto autem die alius post eum mittitur, qui expeditius proficiscens singulis diebus conficit 8 miliaria. Quæritur quot dierum spacio sequens præcedentem tabellarium attingat? Subtrahe 6 ab 8, & manent 2; diuide 18 per 2, & quotus quæsitum indicat.

10. Duo

10. Duo nuncij sunt, quorum unus Augustâ abit Bartpham singulis diebus 6 miliaria peragens. Eâdem hora è Bartphâ alter Augustam proficiscitur, singulisque diebus absoluit 8 miliaria. Distat autem Augusta à Bartpha 104 circiter miliaribus. Quo igitur die ambo nuncij conuenient? Adde 6 & 8, faciunt 14. Diuide 104 per 14, & habebis dies $7\frac{3}{7}$.

11. Sunt centum animalia, boues, oues & capræ, quæ venduntur 100 fl. unus bos 5 fl una ouis 1 fl. una capra 3 cr. Quæritur quot cuiusque generis animalia fuerint? Fuisse autem boues 19: capras 80, & unam ouem Arithmetico probandum relinquimus.

quia unus vir senos sibi attributos habet. Sic una mulier quaternos: una virgo binos.

19. Regula Algebræ cognata est regulæ Falsi. Nam & in regula Falsi, ut in regula Algebræ unitas pro vero numero poni potest: ut in exemplo primi casus regulæ Falsi, scopus est 65. Quæritur autem numerus, cuius dimidium, triens & quadrans eam summam constituat. Loco igitur veri numeri accipiam 1, cuius partes datæ sunt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$, *quæ additæ faciunt* $1\frac{1}{12}$ *siue* $\frac{13}{12}$. *Debebant autem esse 65. Iam sic dicam. Si* $1\frac{1}{12}$ *essent 65, quid 1. Facta operatione & diuisione 65 per* $1\frac{1}{12}$ *veniet 60. numerus quæsitus, hoc modo.*

$$\frac{65}{1} \times \frac{13}{12} \;\Big|\; \frac{780}{13} \;\Big|\; 60.$$

Et per regulam Falsi, similiter ut per regulam Algebræ, omnia exempla regulæ Detri solui possunt.

20. Differt autem regula Falsi à regula Algebræ, quod in illa hypotheses aliæ præter unitatem poni solent: quæ veris numeris æquales non sunt: in hac autem hypothesis quæ assumitur semper æqualis est vero siue quæsito numero. Et in regula Algebræ numeri ineffabiles tractari possunt: in regula Falsi non item.

21. Ex abstractis numeris contracti: & contrà ex contractis abstracti fieri possunt, idq; varijs modis. V. G. Quæstio primi casus, quæ de numero abstracto proponit, ad numeros contractos sic redigi potest.

Quidam pecuniam debet alteri, cuius duplum & dimidium coniuncta 30 faciunt. Quæritur quanta sit summa illius?

Altera quæstio in secundo casu de ætate Ephæstionis ad numeros abstractos sic reuocari potest. Quæruntur tres numeri, quorum primus secundum binario superat: tertius verò ambos quaternario: atq; ij tres simul positi efficiunt 96.

Tertia quæstio de ignota summa aureorum, & pondere mulæ & asini numeris abstractis sic mutari potest. Quæritur numerus, à quo subtracta unitas, & addita alteri faciat duplum prioris: subtracta

vero

verò ab altero & addita priori faciat æqualia? & sic de cæteris.

20. Δοκιμασία exemplorum regulæ Algebræ fit per resolutionem radicis secundum ænigmatis processum: ut in primo casu numerus inueniendus fuit 12, cuius duplum & dimidium coniuncta faciunt 30. Et sic de alijs.

22. Quidam ex neotericis, inter quos N. Raimarus Vrsus duas tantum Algebræ partes faciunt, inuentionem æquationis, & inuenta æquationis reductionem. Reductionis autem nomine intelligunt nouem modos variandi æquationem, quos supra lib. 5. attigimus: hic vero distinctius tanquam apicem totius artis recensere non inutile videtur.

Tres formas priores gubernat 2 & 3 principium Euclidis, Si æqualia addideris vel subtraxeris æqualibus, quæ fiunt erunt æqualia: producta videlicet vel residua.

1. Si absolutus numerus vel o æquatur numero Cossico, affecto signo prosthaphæretico, adde vel subtrahe, prout signa requirunt (signa autem eadem demunt numero: diuersa sed addunt) *absolutum numerum, cum vel ex absoluto, &c.* Fol. 214.

2 ℞ ✠ 4. æq. 8.		*Ergo 2. æq. 4. Hic 4 subtrahuntur ab utroq; numero absoluto, propter idem signum ✠.*
4.	4.	
2 ℞ --- 0 --- 4.		
2 ℞ --- 4. æq 8.		*Ergo 2 ℞ æq. 12. Hic 4 adduntur ad 8, & subtrahuntur à 4, quia signa sunt diuersa.*
4.	4.	
2 ℞ --- 0. æq. 12.		
8 ℞ --- 4. æq 0.		*Ergo 8 ℞ æq. 4. Hic 4 adduntur ad 0 & subtrahuntur à 4, quia signa diuersa.*
4	4.	
8 ℞ --- 0 --- 4.		
8 ℞ ✠ 4. æq. 0.		*Ergo 8 ℞ æq. 0 --- 4. Hic 4 subtrahuntur à 0 & à 4. quia signa sunt eadem.*
4.	4.	
8 ℞ 0	0 - 4.	

II. Si

II. Si duo numeri compositi æquantur reuocabis eos ad simplices, partim reducendo per primum modum, partim transponendo signa, ut.

I. Prima reductio.	8 ℞ ✠ 4 *æq.* 5 ℞ ✠ 22.	*Ergo* 8 ℞ *æq.* 5 R ✠ 18:
	4 4	*Et* 3 R *æqu.* 18.
Secunda reductio.	8 ℞ 0. *æq.* 5 ℞ ✠ 18.	*Hic primum duo absoluti à se inuicem subtrahuntur, quia signa sunt eadem: deinde duæ radices reducuntur per subtractionem unius communis.*
	5 5	
	3 ℞ 0 *æq.* 0. 18.	

II. Prima reductio.	5 R --- 4 *æq.* 12. --- 3 R.	*Ergo* 5 R *æq.* 16 --- 3 R.
	4 4	*Et* 8 R *æq.* 16.
Secunda.	5 R --- 0 *æq.* 16. --- 3 R.	*Hic primũ duo absoluti subtrahuntur & adduntur, quia signa sunt diuersa, deinde fit sola subtractio, & transpositio.*
	5 5	
	0 0 16 *æq.* 8 R.	

III. Prima reductio.	3 R ---- 4 *æq.* 5 R --- 10.	*Ergo* 3 R *æq.* 5 R --- 6.
	4 4	*Et* 3 R ✠ 6 *æq.* 5 R.
Secunda.	3 R ---- 0 *æq.* 5 R ---- 6.	*Et* 2 R *æq.* 6.
	3 R -------- ✠ 6 *æq.* 5 R	*Hic primum duo absoluti subtrahuntur: deinde numeri transponuntur: & rursus subtrahuntur & transponuntur.*
Tertia.	3 R ✠ 6. *æq* -------- 5 R	
	3 R 3 R	
	0. 6 *æq.* -------- 2 R	
	2 R *æq.* 6.	

6 R ✠

6 ℞ ✚ 5. *æq.* 8 R --- 9. *Ergo* 6 R ✚ 14 *æq.* 8 R.
5 5 *Et* 2 R *æq.* 14.

6 R 0 8 R ✚ 14 *Hic primum fit additio & subtractio unius communis propter signa* IIII.
6 6 *diuersa, deinde fit trãspositio tertiò*

0 2 R *æq.* 14 *fit subtractio unius communis.*

Vel sic.

8 R --- 9. *æq.* 6 R ✚ 5
9 9 V.

8 R 0 6 R ✚ 14
6 6
2 R 0 0 *æq.* 14.

5 R --- 6 *æq.* 3 R. *Ergo* 3 R ✚ 6 *æq.* 5 R.

3 R ✚ 6 *æq.* 5 R. *Et* 2 R *æq.* 6. *Hic primum fit transpositio, deindè subtractio & transpositio.*
3 3

0 R. 6 *æq.* 2 R.

III. Omnis æquatio sic est instituẽda, ut numerus denominatus, si unicus fuerit separatim ac per se reliquis æquationũ particulis æquetur: aut si forte plures denominati fuerint, qui maximæ erit denominationis, solus reliquis æquationis partibus æquiparetur, per præcedentem reductionem. V. G. inter censicos triplex fit æquatio, hoc modo.

R ✚ ß *æq.* ȝ. *Ergo* ȝ *æq.* ß ✚ R *siue* R ✚ ß. *Vulgo reg. VII.*
R --- ß *æq.* ȝ. *Ergo* ȝ *æq.* ß --- R *siue* R --- ß. *Regula V. VI.*
ȝ ✚ R *æq.* ß. *Ergo* ȝ *æq.* ß --- R, *siue* R --- ß.
ȝ --- R *æq.* ß. *Ergo* ȝ *æq.* ß --- R *siue* R --- ß.
ȝ ✚ ß *æq.* R. *Ergo* ȝ *æq.* ß --- R *siue* R --- ß.
ȝ --- ß *æq.* R. *Ergo* ȝ *æq* ß --- R *siue* R --- ß.

Tres formas medias, 4, 5, & 6 gubernant duæ propositiones Euclidis 17 & 18, lib. 7. Si æqualia multiplicaueris aut diuiseris per æqualia, quæ fiunt erunt æqualia.

Exempli in quinto casu æquatio fuit inter $\frac{1}{6}$ ℨ & 54 N. Ergo per octauam reductionem √$\frac{1}{6}$ ℨ est æqualis √ 54. Et per 4 reductionem √ 1 est æqualis √ 324. Est autem √ 1 unum: & √ 324 per extractionem 18.

Exempli in sexto casu æquatio fuit inter 2 ℨ & 3 R. Ergo per quintam reductionem 1 R. æquatur 1$\frac{1}{2}$. Per 2 enim numerum maioris denominationis diuiditur 3, & nascitur quotus 1$\frac{1}{2}$.

Exempli in septimo casu æquatio fuit inter $\frac{1}{10}$ ℭ & 10 R. Ergo per quartam reductionem 1 ℭ æquatur 100. Et per 8 reductionem 1 R æquatur 10. De utroque enim numero radix censica extrahitur.

Exempli in octauo casu æquatio fuit inter $\frac{1}{6}$ ℨℨ & 400$\frac{1}{6}$ N. Ergo per quartam reductionem 1 ℨℨ æquatur 2401. Et per octauam reductionem 1 ℞ æquatur 7. De utroque enim numero radix censicensica extrahitur. Radix censicensica de 2401 est 7. Nam septies 7 sunt 49: & 49 ducta in 49 pariunt 2401.

Exempli in nono casu, æquatio fuit inter 18750 ℞ & 30 ß. Ergo per sextam reductionem subtrahendo exponentem minoris characteris ab exponente maioris characteris 30 ℨℨ æquantur 18750 N. deinde per quintam reductionem 1 ℨℨ æquatur 625: & per octauam reductionem una radix æquatur 5. De utroque enim numero radix censicensica extrahitur. Radix censicensica de 1 est 1: & de 625 est 5. Nam quinquies 5 sunt 25, & 25 ducta in 25 gignunt 625.

Exempli in decimo casu æquatio fuit inter $\frac{1}{36}$ ℭ & 1 ℨ. Ergo per quartam reductionem 1 ℭ est æqualis 36 ℨ: & per sextam perductionem 1 ℞ æquatur 36 N.

Ex quibus apparet hanc de varijs generibus reductionum doctrinam esse apicem huius artis, & magnam adferre lucem regulæ Algebræ, quam & breuiorem facit, & dilucidiorem, cum fontes operationum ex tribus principijs desumtos apertè ostendat.

22. Sunt vero & multa ænigmata, ex quibus quædam sunt similia vaticinijs, quæ sine Algebra solui possunt: qualia sunt hæc.

1. Fac tabulam quadratam, in qua termini progresſionis facientes numerum quemcunque quadratum ita tranſponantur, ut eadem ſumma ſemper proueniat ex additione omnium terminorum in uno latere inuentorum, ſiue latus ſumatur ſecundum latitudinem, ſiue ſecundum longitudinem: ſiue ſecundum ambas diametros? Compoſitionem harum tabularum prolixiorem docet Stifelius lib. 1. cap. 3. & Franciſcus Spinola libello de tabellis quadratorũ numerorum: efficaciam ſuperſtitioſam Th. Paracelſus lib. de imaginibus. Sunt autem radices numerorum quadratorum ad has tabulas aptorum (Nam 1 & 2 nullam tabulam faciunt) ſimplices ſeptem, nempe 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: unde ſeptẽ recenſentur eiuſmodi tabulæ, quarum ſingulas planetæ alicui tribuunt: ex 9 (cuius radix 3) factam Saturno: ex 16 (cuius radix 4) factam Ioui: ex 25 Marti: ex 36 Soli: ex 49 Veneri: ex 64 Mercurio: ex 81, Lunæ. Plures autem eæque infinitæ componi poſſunt ex radicibus numerorum compoſitorum. Tabella igitur Saturni ex numero 9 eſt hæc.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Hic ſumma numerorum eſt eadem nempe 15, octo modis ſic.

Primo,	4,	9,	2,	ſunt	15.
Secundo,	3,	5,	7,	ſunt	15.
Tertio,	8,	1,	6,	ſunt	15.
Quarto,	4,	3,	8,	ſunt	15.
Quinto,	9,	5,	1,	ſunt	15.
Sexto,	2,	7,	6,	ſunt	15.
Septimo,	4,	5,	6,	ſunt	15.
Octauo,	8,	5,	2,	ſunt	15.

Tabula Iouis.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

In ſecunda tabella ſuma ſingulorum laterum eſt 34, decem modis. Eadem eſt ratio aliarum tabularum.

2. Quis

2. Quis est annus martyrij S. Laurentij, descriptus versibus Iosephi à Pinu.

Annis si Tharida, claris Alcidis & actis
Prima addas stabili corpora iuncta fide:
Et capita adijcias semper crescentis Echidnæ
Astris, Neptuni, quæ fera pristis habet.
Tempus habes, iuuenis quo cratifer urbe Quirini
Vltima sub Decio Cæsare fata tulit.

Anni Abrahami	175
Labores Herculis	12
Prima corpora	4
Capita hydræ	50
Astra ceti	13
Annus martyrij	254.

3. AVG. VIND. donata est libertate, & facta urbs imperij à Friderico I. Barbarossa A. C. 1162. Annus autem nunc agitur 1609. Quæritur quot iam anni elapsi sunt? subtraho 1162 à 1609: remanent anni 447. Tot annos Augusta iurisdictionem obtinet, qualem principes, & numeratur inter primas ex 4 columnis imperij.

4. Dolium vini, quod sex capit amphoras, quæritur quot habeat mensuras, quot sextarios, quot guttulas? Capit 5898240 guttulas, hoc modo.

```
      64  mensuræ.
       6  amphor.
     ----
     384  mensuræ.
       2  sextarij.
     ----
     768
     7680 Guttulæ.
    -----
    61440
   4608
  5376
  -------
  5898240. Guttulæ.
```

 5. Iudææ

5. Iudęæ longitudo est 40: latitudo 15 miliarium: quot miliaria quadrata habet tota illa regio? Facit 600 mill.

6. Scribe 1000 sine cifris? sic scribitur $999\frac{8}{8}$. Nam $\frac{8}{8}$ significant unum integrum, quod additum ad 999, mille procreat. Idem vero facit alia quæuis fractio, cuius numerator est æqualis denominatori, ut $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c.

7. Mos est Augustæ secunda feria paschatis, ut duo iuuenes iuxta portam rubram hoc ludi cursorij genus exerceant. Vni eorum oua 100 in directum locata, & bipedalem inter se distantiam continuè seruantia in corbem pedibus duobus à primo ouo distantem ita colligenda, ut quolibet excursu non nisi unicum auferre liceat: dum uniuersa fracto nullo comportet: alteri interim facto ad vicinum pagum Göckingam dictum, semisse miliaris ab urbe distantē excursu redeundum: ut qui pensum suum primò absoluerit βραβεῖον auferat. Quæritur quantum itineris collector ouorū dicta lege conficiat? supputatio fit hoc modo. A corbe ad primum ouum hinc inde sunt 4 pedes: à corbe ad secundum 8: ad tertium 12: ad quartum 16, & sic deinceps progressione Arithmetica, seruato æquali excessu. Erit igitur centesimus numerus 400, hoc modo. Demta unitate à 100 remanent 99, quibus per quatuor numero excessus multiplicatis, & producto ad primum progressionis numerum addito nascitur 400 numerus ultimus Summa vero omnium terminorum pedes 20200, hoc modo. 100 & 4 addita faciunt 104, quæ ducta in dimidium locorum 50 producunt 20200, id est, stadia $32\frac{8}{25}$. Plerunque autem is, qui oua colligit pensum suum citius absoluit, quàm alter: unde apparet spacium Augustâ Gögginkam versus & illinc retrorsum esse ferè quicunce stadij, maius communi miliari Germanico, cum stadia $32\frac{8}{25}$ contineat. Comportat au-

tem

tem collector ouorum interdum plura quàm 100 oua, ut *105*, & *107* pro varietate tempestatum & itineris sici vel humidi. Ex quo apparet distantiam duorum locorum ex collectione ouorum posse cognosci: quod imperito Arithmeticæ impossibile videtur.

8. Conuictores duodecim ad mensam sedentes in scamno quæritur, quot modis inter se ordinem sessionis mutare possint, manente semper eodem numero conuictorũ? Cape tot numeros in serie naturali, quot sunt res, initio facto ab unitate, & illos omnes inter se multiplica. Procreatus enim numerus ostendet propositum, hoc modo. Numerorum series est hæc. *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.* Iam sic dico. Semel 2 sunt 2, bis 3 sunt 6: quater 6 sunt 24, quinquies 24 sunt *120*: sexies *120* sunt 720: septies *720* sunt 5040: octies 5040 sunt 40320: nouies 40320 sunt 362880: decies 362880 sunt 3628800: undecies 3628800 sunt 39916800: duodecies 39916800 sunt 479'001'600. Tot igitur modis inter se varijs conuictores duodecim sedentes in scamno sessiones facere possunt. Nam numeri propositi inter se multiplicati eum numerum procreant. Eadem ratione duæ res, v. g. A, B duobus modis variari possunt. Nam quæuis primum occupabit locum, hoc modo. A B, B A, quoniam hi numeri *1, 2,* inter se multiplicati efficiunt 2. At tres res possunt sex modis variari. Nam hi numeri *1, 2, 3* multiplicati inter se faciunt 6. Nam unaquæque res primum tenebit locum semel, & reliquæ duæ bis possunt mutari inter sese.

Quod si non maneat idem numerus rerum: sed binæ tantum combinationes sumantur: numerus combinationũ sic inuenitur. Numerum rerum multiplica per numerũ proximè minorem. Producti numeri medietas indicabit numerum combinationũ, quæ fieri possunt inter res propositas.

V. G.

V. G. Inter quatuor qualitates primas ſex combinationes fieri poſſunt Nam 4 multiplicata per 3 efficiunt 12 : cuius dimidium ſunt ſex. Poſſibiles autem ſunt 4 : impoſſibiles 2 : unde & quatuor tantum elementa recenſentur. Sic inter quinque prædicabilia, decem tantum combinationes fieri poſſunt, quot videlicet & Porphyrius in ſua iſagoge enumerat.

Diuerſas autem & plures comparationes ſic inuenies. Accipe tot numeros incipiendo ab unitate in dupla proportione, quot res ſunt propoſitæ : & à ſumma omnium illorum ſubtrahe numerum rerum. Reliquus enim numerus indicabit, quotnám comparationes diuerſæ effici poſſint: ut in ſupra dictis quatuor qualitatibus, numeri in dupla proportione iuxta numerum rerum erunt 4, nimirum 1, 2, 4, 8 : quorum ſumma eſt 15 : abiectis ergo 4 remanent 11. Tot igitur modis diuerſis coniũgi poterunt quatuor primæ qualitates, videlicet hæ : caliditas frigiditas : caliditas, ſiccitas : caliditas humiditas : frigiditas ſiccitas : frigiditas humiditas : ſiccitas humiditas : caliditas frigiditas ſiccitas : caliditas ſiccitas humiditas : frigiditas ſiccitas humiditas, caliditas frigiditas humiditas : & demum caliditas frigiditas ſiccitas humiditas.

Sic ex 23 literis dictiones ſiue diuerſæ coniunctiones fient numero 8388584.

9. Tabellarius ſingulis diebus 6 miliaria eundo abſoluit : & iam tertius poſt ſuum abitum dies agitur ; ut ſic 18 miliaria peragrauerit. Quarto autem die alius poſt eum mittitur, qui expeditius proficiſcens ſingulis diebus conficit 8 miliaria. Quæritur quot dierum ſpacio ſequens præcedentem tabellarium attingat? Subtrahe 6 ab 8, & manent 2 ; diuide 18 per 2, & quotus quæſitum indicat.

10. Duo

10. Duo nuncij sunt, quorum unus Augustâ abit Bartpham singulis diebus 6 miliaria peragens. Eâdem hora è Bartphâ alter Augustam proficiscitur, singulisque diebus absoluit 8 miliaria. Distat autem Augusta à Bartpha *104* circiter miliaribus. Quo igitur die ambo nuncij conuenient? Adde 6 & 8, faciunt *14*. Diuide *104* per *14*, & habebis dies $7\frac{3}{7}$.

11. Sunt centum animalia, boues, oues & capræ, quæ venduntur 100 fl. unus bos 5 fl una ouis 1 fl. una capra 3 cr. Quæritur quot cuiusque generis animalia fuerint? Fuisse autem boues *19*: capras 80, & unam ouem Arithmetico probandum relinquimus.

Fol. 22 u. 19 *Eparithmesis, lege Aparithmesis*. Fol. 21 u. 37 *delendum est* 2 *ex numero* 57300, &c. Fol. 24 u. 25 *Quatuor, l. tres*. Fol 33 u. 13 *nempe* B C, *l.* AB. Fol. 36 u. 19. 1 *n. l.* 2 *n.* Fol. 37 u. 16 *pro l per*. Fol. 56 u. 21 *sit l. sit* Fol. 61 u. 14. 4 *num. l.* 3. Fol. 76 u. 23 *l. Ergo etiam* $\frac{15}{24}$ *siue* $\frac{5}{8}$ *sunt* $\frac{3}{8}$ & $\frac{5}{8}$. (*Nam* 15 *non sunt* $\frac{3}{4}$ *ipsorum* 24, *sed* $\frac{5}{8}$) Fol. 82 u. 14 $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$ *non requirunt reductionem ad aequales denominatores: cum iam antea aequales habeant*. Fol. 87 u. 19 & *fiunt: adde*, 4 & 3: *qui seorsim in suos numeratores* 1 & 3 *ducti efficiunt* 4 & 9, *quae coniuncta*, &c. Fol. 88 u. 23 *relinquunt* 3, *lege* $3\frac{3}{4}$ Fol. 91 u. 27 $\frac{3}{5}$ *l.* $\frac{3}{4}$. Fol. 92 u. 25 *post* 45 *adde, quorum*: & u. 26 *post* 20 *adde, quorum* Fol. 93 u. 29 *pro* $\frac{8}{18}$ *l.* $\frac{8}{9}$. Fol. 100 u. 3 *pro supertritertius l. superbitertius*: u. 4. *pro superbiquartus l. supertriquartus*. Fol. 108 u. 4 *pro* $\frac{2}{3}$ *l.* $\frac{3}{2}$. Fol. 109 u. 30, *pro* 6 *pone* b u. 31 *pro* 9 *pone* q. u. 34 *pro* 9 *pone* q. Fol 110 u. 13 *in schemate pro* 9 *pone* q: *pro* l *pone* b. Fol. 118 u. 19, *pro* 8, *pone* 7. Fol. 125 u. 24, *pro* 126 *pone* 120. Fol. 127 u. 21, 1, 2, *dele* 1. u. 23 *pro* 9 *pone* 7. Fol. 149 *in schemate deest litera* D, *ponenda supra* A. Fol. 155. *sub censicubis corrige numeros quatuor sic*. *E regione* 6 46656. *E regione* 7. 117649. *E regione* 8, 262144. *E regione* 9. 531441. Fol. 162 u. 12 *pro* 8 *pone* 6. Fol. 163 *in schemate* B D, *pro* 1200 *pone* 12000: *in supplemento* L H: & *in altero* H I. Fol. 165 *pro* 120000 *ad* 12 &c. *lege* 120000 *ad* 12 *est duplicata ratio eius, quam habet ferè* 346 *ad* $3\frac{23}{50}$. *id est*. *quae* 100 *ad* 1. *Et* 120000 *ad* 1 *rationem habet duplicatam eius quam habet* 346 *ad* 1. Fol. 166 u. 6, *pro* $1\frac{88}{100}$ *lege* $3\frac{46}{100}$. Fol. 167 u. 15 *pro* $\frac{1}{3}$ *lege* $\frac{1}{2}$. Fol. 171 u. 17 *pro* $\frac{2}{127}$ *lege* $\frac{2}{177}$. u. 31 *pro diuisio lege diuiso* Fol. 180 u. 13, *pro* 58 *lege* 125, *pro* 96 *lege* 208. u. 14 *pro* $\frac{58}{96}$ *l.* $\frac{125}{208}$ *seu* $\frac{125}{208}$, *id est*, $\frac{62}{104}$. Fol. 182 u. 6 *pro maius l. minus*, u. 10 *pro minus l. maius*, u. 13, *pro minorum l. maiorum*. Fol. 191 u. 8, *pro sic proportio* &c. *l.* 1200000000 *ad* 12 *quadruplicatam habent rationem* 100 *ad* 1. *At* 120000000 *ad* 1. *quadruplicatam habent rationem* 186. *ad* 1. u. 11. *l.* 1196883216. u. 11, *adde* 186 *loco tertio in spacio uacuo*. u. 20. *in fine numeratoris l.* 6 *pro* 0. Fol. 195 u. 31 *minor l. maior* Fol. 189 u. 13, *pro* 151 *l.* 164 u. 14, *pro* $\frac{151}{100}$ *l.* $\frac{164}{100}$: & *pro* $1\frac{51}{100}$ *l* $1\frac{64}{100}$. u. 18, *minorem l. maiorem*. Fol. 199. u. 16 *l.* 531441. u. 31 *l.* 191102976. u.

32 *dele pro radix*, l. 2000000. Fol. 200 *u.* 1, *pro quinis l. senis*, *u.* 2 *pro* [illegible] *l.* [illegible] *& in altero, pro* [illegible] *lege* [illegible] *u.* 3, *pro* [illegible] *lege* [illegible]. Fol. 205 *u.* 25 *l.* 65536. Fol. 208 *u.* 26. 6$\frac{1}{2}$ *adde* ..... Fol. 214 *u.* 29 *inserendus paragraphus num.* 5 *signatus fol.* 217 *cum sequentibus usq; ad* ¶ Radicum &c. Fol. 225 *u.* 24 *summa additionis l.* Radix *summæ additionis*. Fol. 228 *u.* 13 *adde* √ *ad* 19600. Fol. 227 *u.* 1, *pro* √ *lege* 2. *u.* 33 *l.* √ ȼ. Fol. 228 *u.* 7 √ ȼ *adde* 10. Fol. 230 *u.* 18, $\frac{2}{3}$ *adde* $\frac{1}{3}$. *u.* 22. *l.* $\frac{81 + 9 ℞.}{12}$

Fol. 231. *u.* 3. *pro* 6 *l.* 6 ȼ Fol. 232 *u.* 10 *pro* 5 ℞ *à* 40 ℨ *l.* 40 ℨ *à* 5 ℞. Fol. 235. *u.* 19 = 1 *semel tantum poni debet.* *u.* 30 *l.* 5$\frac{1}{2}$ + 6 ℞. *u.* 16 *l.* 16 ℞. Fol. 240 *u.* 2 *l. dissimilis.* *u.* 26 2.381. *l.* 2401. *u.* 28 *l.* 64 +: *deinde* 81 +. Fol. 241. *u.* 23 *pro* $\frac{2}{3}$ *l.* $\frac{2}{3}$. Fol. 249 *u.* 7. *pro* √ *l.* √$\frac{1}{2}$. *u.* 8 *pro* √ *l.* √$\frac{1}{2}$. *u.* 4 *pro* + 288 *l.* + √$\frac{1}{2}$ 288 Fol. 251 *u.* 8. *pro* 27 ȼ + 24$\frac{1}{2}$ *l.* $\frac{27 ȼ + 24\frac{1}{2}}{12.}$: *sic & u.* 13: *ubi quoq; denominator omissus est.*

Fol. 251 *u.* 21. *reductio ad eandẽ denominationẽ non est necessaria.* Fol 256 *u.* 9 & 10 *pro* 2 + √ 3 *l.* 2 — √ 3 & *pro* 2 — √ 3 *l.* 2 + √ 3: & *sic in cæteris, quæ sunt à pagina* 255 *usq; ad p.* 257. Fol. 257 *u.* 19 *pro* 4 — √ 3 *l.* 4 — 3. *sic & u* 23 & *u.* 24. Fol. 258 *u.* 11 *l.* 8 — √ 48: *u.* 15 *l.* 9 — √ 45. *u.* 27. *pro* √ ȼ *l.* √ $\frac{1}{2}$. Fol. 262 *u.* 24 *l.* 40 ℞ + 25. *u.* 25 *l.* 104$\frac{1}{2}$. Fol. 265 *u* 15. *adde post toto*, *hæc uerba: bisecet rectam* A C *in puncto* C, *ex quo*. Fol. 267 *u.* 8. *τὸ æquale numero absoluto minus ualore radicum, abundat* *u* 10 *idem quod antea abundat.* Nam *gnomon* G B K *est* 48 *præcisè*: *non* 48 + 8 ℞. *u.* 11 *post à quo, adde, latere* D B, *id est*, 8 *rursus.* *u.* 17 *pro* D A *l.* D H, & *pro c d, l. c k.* Fol. 268 *u.* 4. *post τὸ absoluta adde* — 8 ℞. *u.* 18. *ignotum l. notum.* Fol. 272. *u.* 31. *post binomium, adde*, & *residuum.* Fol. 273 *u.* 30 *pro* A$\frac{1}{2}$ *l.* A ȼ. Fol. 280 *u.* 19 *l.* 16796160000000. *u.* 22. *dele unum* 7. Fol 281 *u.* 16 *l* 16796. &c. *ut antea.* Fol. 275 *u.* 14. 7^{mum} *dele.* Nam *abundat.* Fol. 298. *u.* 4 *l. in postremo* 1′: & *u.* 5. *l. in ultimo* 1″. Fol. 301. *u.* 1 *supra* 49. *l.* 2, *sic* 2. Fol. 374 *u.* 7. *quotus adde, quod u.* 8. *sequitur* $\frac{8 + \sqrt{20} ℞.}{6 + \sqrt{11\frac{1}{3}}.}$ $\frac{9}{49}$

Fol 274 u. 37 Ex sententia aliorum Arithmeticorum uni radici primæ & secundæ tribuitur idem ualor: uerior autem ualor primæ radicis est 3: secundæ radicis 4. Erunt igitur 3 A 9 & 9 B 36. Ductis iam 3 A in 9 B, hoc e 9 in 36 proueniunt 324, æqualia 27 A B. Siue enim 27 A ducas in 4 B: siue 27 B in 1 A. produces semper prædictum numerum. 27 A sunt 81: quæ ducta in 1 B, id est, in 4 faciunt 324, sic 27 B, hoc est, 108 ducta in 1 A, id est, in 3 etiam efficiunt 324. Fol 306 u. 24. 20. l 2°0'. Fol 308, 54 l. 14. Fol. 309 u. 1. 7 l. 14. Fol. 310. u. 8 9 dele Fol. 313 u. 31. $\frac{1}{8}$ l. $\frac{1}{2}$. & sic u 32. Fol. 315 u. 24 pro $\frac{20}{210}$ l $\frac{6}{210}$. bis. u. 25 pro 20 l. 6. Fol. 318. u. 25 adhuc dele Fol. 331 u. 19. l 48. 72, 90, 105. Fol. 345. u. 10 pro $\frac{2}{8}$ l. $\frac{3}{8}$ Fol. 349. pro $\frac{1}{3}$ l. $\frac{1}{2}$. Fol. 350. u. 25 & 26 pro 2. 2. l. 5. 5. & u 29 pro 12 l. 18 Fol. 354 u 13. pro 320 l. 560: & sic primus accepit 28$\frac{4}{7}$ fl secundus 57$\frac{1}{7}$ fl. tertius 114$\frac{2}{7}$ fl. sic tota summa est 200 fl. Fol. 355. u 13. maior l minor. u. 24. ✠ 52 l. — 52, u, 28. ✠ 39 l — 39. Fol. 356 u 17. — 13 l. ✠ 13. Fol. 365 u. 10. pro 6 l. 30. Fol. 370. u. 19 post 144, adde 1728. Fol. 372 u. 2. subtrahendo, l. addenda 1 N ad 1 A — 1. Fol. 376 u. 5. l. bis tot, u. 27. l $\frac{1}{3}$ C. u. 29. 10 l. 100 u. 30. l sortis singulorum pro sociorum. Fol. 380 u. 12 pro N, lege 12 lineis A D u. 14. 2$\frac{1}{2}$ ℞ dele ℞. Fol 381. u. 1. pro — lege æq u. 2. l. 4 ℞. u. 3 adde æq. Fol. 384. u. 24 l. 1 æqualis. Fol. 389 u. 13. 19. l. 19 sic & u 16, & 17, u. 19 5 ℞ l 4 ℞, & 24 — l. ✠. Fol 391. u. 19. l 2 ℞ æq. 4: sic u 21 pro 0 — l. 0 æq. u. 23. pro subtrahuntur, l. adduntur. sic u. 26. l. adduntur. u. 27. 0 — 4. l. 0 æq. 4 u. 30. l. 0 æq. 0 — 4.

F I N I S.

TABVLA QVADRATORVM, ET CVBORVM.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
1	1	1	41	1681	68921	81	1656	531441
2	4	8	42	1764	74088	82	4672	551368
3	9	27	43	1849	79507	83	6889	571787
4	16	64	44	1936	85184	84	9705	592704
5	25	125	45	2025	91125	85	7225	614125
6	36	216	46	2116	97336	86	7396	636056
7	49	343	47	2209	103823	87	7569	658503
8	64	512	48	2304	110592	88	7744	681472
9	81	729	49	2401	117649	89	7921	704968
10	100	1000	50	2500	125000	90	8100	729000
11	121	1331	51	2601	132651	91	8281	753571
12	144	1728	52	2704	140608	92	8464	778688
13	169	2197	53	2809	148877	93	8649	804357
14	196	2744	54	2916	157464	94	8836	830584
15	225	3375	55	3025	166375	95	9025	857375
16	256	4096	56	3136	175616	96	9216	884736
17	289	4913	57	3249	185193	97	9409	912673
18	324	5832	58	3364	195112	98	9604	941192
19	361	6859	59	3481	205379	99	9801	970299
20	400	8000	60	3600	216000	100	10000	1000000
21	441	9261	61	3721	226981	101	10201	1030301
22	484	10648	62	3844	238328	102	10404	1061208
23	529	12167	63	3969	250047	103	10609	1092727
24	576	13824	64	4096	262144	104	10816	1124864
25	625	15625	65	4225	274625	105	11025	1157625
26	676	17576	66	4356	287496	106	11236	1191016
27	729	19683	67	4489	300763	107	11449	1225043
28	784	21952	68	4624	314432	108	11664	1259712
29	841	24389	69	4761	328509	109	11881	1295029
30	900	27000	70	4900	343000	110	12100	1331000
31	961	29791	71	5041	357911	111	12321	1367631
32	1024	32768	72	5184	373248	112	12544	1404928
33	1089	35937	73	5329	389017	113	12769	1442897
34	1156	39304	74	5476	405224	114	12996	1481544
35	1225	42875	75	5625	421875	115	13225	1520875
36	1296	46656	76	5776	438976	116	13456	1560896
37	1369	50653	77	5929	456533	117	13689	1601613
38	1444	54872	78	6084	474552	118	13924	1643032
39	1521	59319	79	6241	493039	119	14161	1685159
40	1600	64000	80	6400	512000	120	14400	1728000

TABVLA QVADRATORVM, ET CVBORVM.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
121	14641	1771561	161	25921	4173281	201	40401	8120601
122	14884	1815848	162	26244	4251528	202	40804	8242408
123	15129	1860867	163	26569	4330747	203	41209	8365427
124	15376	1906624	164	26896	4410944	204	41616	8489664
125	15625	1953125	165	27225	4492125	205	42025	8615125
126	15876	2000376	167	27556	4574296	206	42436	8741816
127	16129	2048383	167	27889	4657463	207	42849	8869743
128	16384	2097152	168	28224	4741632	208	43264	8998912
129	16641	2146689	169	28561	4826809	209	43681	9129329
130	16900	2197000	170	28900	4913000	210	44100	9261000
131	17161	2248091	171	29241	5000211	211	44521	9393931
132	17424	2299968	172	29584	5088448	212	44944	9528128
133	17689	2352637	173	29929	5177717	213	45369	9663597
134	17956	2406104	174	30276	5268024	214	45796	9800344
135	18225	2460375	175	30625	5359375	215	46225	9938375
136	18496	2515456	176	30976	5451776	216	46656	10077696
137	18769	2571353	177	31329	5545233	217	47089	10218313
138	19044	2628072	178	31684	5639752	218	47524	10360232
139	19321	2685619	179	32041	5735339	219	47961	10503459
140	19600	2744000	180	32400	5832000	220	48400	10648000
141	19881	2803221	181	32761	5929741	221	48841	10793861
142	20164	2863288	182	33124	6028568	222	49284	10941048
143	20449	2924207	183	33489	6128487	223	49729	11089567
144	20736	2985984	184	33856	6229504	224	50176	11239424
145	21025	3048625	185	34225	6331625	225	50625	11390625
146	21316	3112136	186	34596	6434856	226	51076	11543176
147	21609	3176523	187	34969	6539203	227	51529	11647083
148	21904	3241792	188	35344	6644672	228	51984	11852352
149	22201	3307949	189	35721	6751269	229	52441	12008989
150	22500	3375000	190	36100	6859000	230	52900	12167000
151	22801	3442951	191	36481	6967871	231	53361	12326391
152	23104	3511808	192	36864	7077888	232	53824	12487168
153	23409	3581577	193	37249	7189057	233	54289	12649337
154	23716	3652264	194	37636	7301384	234	54756	12812904
155	24025	3723875	195	38025	7414875	235	55225	12977875
156	24336	3796416	196	38416	7529536	236	55696	13144256
157	24649	3869893	197	38809	7645373	237	56169	13312053
158	24964	3944312	198	39204	7762392	238	56644	13481272
159	25281	4019679	189	39601	7880599	239	57121	13651919
160	25600	4096000	200	40000	8000000	240	57600	13824000

TABVLA QVADRATORVM, ET CVBORVM.

Radices	Quadrati.	Cubi.	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
241	58081	13997521	281	78961	22188041	321	103041	33076161
242	58564	14172488	282	79524	22425768	322	203684	33386248
243	59049	14348907	283	80089	22665187	323	104329	33698267
244	59536	14526784	284	80656	22909304	324	104976	34012224
245	60025	14706125	285	81225	23149125	325	105625	34328125
246	60516	14886936	286	81796	23393656	326	106276	34645976
247	61009	15069223	287	82369	23639903	327	106929	34965783
248	61504	15252992	288	82944	23887872	328	107584	35287552
249	62001	15438249	289	83521	24137569	329	108241	35611289
250	62500	15625000	290	84100	24389000	330	108900	35937000
251	63001	15813251	291	84681	24642171	331	106561	36264691
252	63504	16003008	292	85264	24897088	332	110224	36594368
253	64009	16194277	293	85849	25153757	333	110889	36926037
254	64516	16387064	294	86436	25412184	334	111556	37259704
255	65025	16581375	295	87025	25672375	335	112225	37595375
256	65536	16777216	296	87616	25934336	336	112896	37933056
257	66049	16973593	297	88209	26198073	337	113569	38272753
258	66564	17173512	298	88804	26463592	338	114244	38614472
259	67081	17373979	299	89401	26730899	339	114921	38958219
260	67600	17576000	300	90000	27000000	340	115600	39304000
261	68121	17779581	301	90601	27270901	341	116281	39651821
262	68644	17984728	302	91204	27543608	342	116964	40001688
263	69169	18191447	303	91809	27818127	343	117649	40353607
264	69696	18399744	304	92416	28094464	344	118336	40707584
265	70225	18609625	305	93025	28372625	345	119025	41063625
266	70756	18821096	306	93636	28652616	346	119716	41421736
267	71289	19034163	307	94249	28934443	347	120409	41781923
268	71824	19248832	308	94864	29218112	348	121104	42144192
269	72361	19465109	309	95481	29503629	349	121801	42508549
270	72900	19683000	310	96100	29791000	350	122500	42875000
271	73441	19902511	311	96721	30080231	351	123201	43243551
272	73984	20123648	312	97344	30371328	352	123904	43614208
273	74529	20346417	313	97969	30664297	353	124609	43986977
274	75076	20570824	314	98596	30956144	354	125316	44361864
275	75625	20796875	315	99225	31255875	355	126025	44738875
276	76176	21024576	316	99856	31554496	356	126736	45118016
277	75729	21253933	317	100489	31855013	357	127449	45499293
278	77284	21484952	318	101124	32157432	358	128164	45882712
279	77841	21717639	319	101761	32461759	359	128881	46268279
280	78400	21952000	320	102400	32768000	360	129600	46656000